Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 1-11

मनश्चिकित्सा का एक पहलू : सी०एन०एस० औषधियाँ

डा० कृष्ण चन्द्र जोशी

कार्बनिक रसायन, राजस्थान विश्वविद्यालय

1. परिचय

हमारे समाज में मानसिक असंगतियाँ सदा से ही अभिशापस्वरूप व्याप्त रही हैं परन्तु दुर्भाग्य की बात है कि पिछले कुछ दशकों से पहले के चिकित्सकों को इस क्षेत्र में कोई विशेष सफ़लता नहीं मिली। प्राचीन काल में तो इस प्रकार के रोगी समाज से बहिष्कृत रहते थे। यहाँ तक कि पन्द्रहवीं शताब्दी में भी यूरोप के सभ्य कहलाने वाले देशों में इनके लिए जो विशेष चिकित्सालय बने, वे नाममात्र ही के लिए चिकित्सालय कहे जा सकते थे। मानव सभ्यता के विकास के साथ-साथ लोगों का ध्यान मानसिक रोगों की ओर भी गया और पिछले तीन दशकों में मानसिक व्याधियों के निदान करने में वैज्ञानिकों को अनेक सफलताएँ मिलीं। इन उपलब्धियों में कार्बनिक रसायनज्ञों का अत्यन्त महत्वपूर्ण योगदान रहा है। इन्होंने उन अनेक रसायनों का अध्ययन किया जो विचार, व्यवहार, अवगम (perception), अनुभव एवं मानसिक तथा शारीरिक क्रियाशीलता में परिवर्तन कर सकें। इस प्रकार के सभी रसायन केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र औषधियां (सी० एन० एस० औषधियां, C. N. S. Drugs) अथवा साइकोट्रोपिक (Psychotropic) औषधियां कहलाती हैं तथा इनका अध्ययन मनोभेषजगुण विज्ञान (साइकोफॉर्माकॉलाजी, Psychopharmacology) कहलाता है।

1.1 इस शताब्दी में अनेक कार्बनिक औषधिकर्मकों का विकास हुआ जिनमें से अधिकतर पिछले 35 वर्षों में विकसित हुए। इन सभी कर्मकों के उद्गम मुख्यतया तीन प्रकार के हैं :

(i) पादप या जन्तु उद्गम अर्थात् प्राकृतिक रूप से पाये जाने वाले पदार्थों से,

(ii) उन यौगिकों के संश्लेषण से जिनकी संरचना औषधीय उपयोगिता वाले प्राकृतिक यौगिकों से मिलती जुलती हो, जैसे : मॉर्फीन, रेसरपिन, एट्रोपीन, कोकीन आदि से,

(iii) रसायन प्रयोगशालाओं में पूर्ण संश्लेषण द्वारा--उदाहरणतया नाना प्रकार के प्रशान्तक (Tranquilizers), बार्बिट्यूरेट (Barbiturates), प्रतिरोधी (Antiseptics) आदि।

---

*69वें विज्ञान कांग्रेस अधिवेशन मैसूर के अवसर पर विज्ञान अनुसन्धान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्ष पदीय भाषण।

सी० एन० एस० ओषधियों का आधुनिक काल पांचवें दशक में दो अत्यन्त महत्वपूर्ण खोजों से प्रारम्भ हुआ। इनमें प्रथम खोज थी 1952 में मिलटलर तथा उसके सहयोगियों द्वारा एक पादप ऐल्केलॉयड, रेसरपिन, को पृथक करने में सफलता[1] एवं द्वितीय, फिनोथायजीन व्युत्पन्न, क्लोरप्रोमेजीन, का संश्लेषण[2]। इन महत्वपूर्ण खोजों ने मानसिक रोगों के उपचार की दिशा ही बदल दी और मनश्चिकित्सा में एक क्रान्ति पैदा करने के साथ ही साथ कार्बनिक रसायनज्ञों को इसी प्रकार के अन्य यौगिकों की खोज के लिए प्रेरित भी किया।

इस व्याख्यान में इस प्रकार की खोजों का एक संक्षिप्त विवरण प्रस्तुत किया जा रहा है।

1.2 केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र को प्रभावित करने वाली औषधियों को उनके प्रभाव के अनुसार तीन समूहों में विभाजित किया जा सकता है :

(क) सी० एन० एस० अवसादक (C. N. S. Depressants) : ऐसी सभी औषधियाँ, जो केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र को अवनत करती हैं जैसे संवेदनाहारी गैसें (anaesthetic gases), ऐलिफैटिक ऐल्कोहॉल, बार्बिट्यूरेट एवं शामक (sedatives) तथा निद्रापक (hypnotics) औषधियाँ।

(ख) सी० एन० एस० उद्दीपक एवं अवसादरोधी (C. N. S. Stimulants and Anti-depressants) : ऐसी सभी औषधियाँ जो केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र को उत्तेजना द्वारा प्रभावित करती हैं, यथा स्ट्रिक्नीन, फेनिलीन टेट्राजोल, जैन्थीन आदि।

(ग) विभ्रमजनक अथवा साइकोटोमाइमिटिक औषधियाँ (Hallucinogens or psychotomimetic drugs) : इस वर्ग में वे सभी औषधियाँ आती हैं जो विभिन्न तन्त्रों पर अवनत या उत्तेजक दोनों प्रभाव डाल कर केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र की कार्यप्रणाली को परिवर्तित कर देती है। इस समूह के प्रमुख उदाहरण भांग, हशीश, चरस तथा एल० एस० डी० (L. S. D.) हैं।

2. सी० एन० एस० अवसादक

जैसा कि बतलाया जा चुका है, ये औषधियाँ केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र को अवनत करती हैं। ये अपने प्रभाव के आधार पर दो प्रकार की हैं :

(क) निद्रापक एवं शामक तथा गौण प्रशान्तक (Hypnotics and sedatives; Minor Tranquilizers)

(ख) प्रबल मानसिकी शामक तथा मुख्य प्रशान्तक (Neuroleptics; Major Tranquilizers)

गौण प्रशान्तक :

निद्रापक एवं शामक वे यौगिक हैं जिनके सेवन से प्राकृतिक निद्रा जैसी नींद आती है। जो लोग ग़ालिब के "मौत का एक दिन मुअय्यन है, नींद क्यों रात भर नहीं आती ?" में विश्वास नहीं कर पाते, उनके मर्ज़ की दवा यही यौगिक हैं। शामक वे यौगिक हैं जो उत्तेजना (excitement) कम करते है। रासायनिक संरचना के अनुसार इस वर्ग के यौगिक निम्न प्रकार के हो सकते हैं :

2.1 अफीम के ऐल्केलॉयड तथा सम्बन्धित यौगिक : अफ़ीम पोस्ते के कच्चे फलों (**पैपेवर सोम्नीफेरम**) से निकले आक्षीर (Latex) को सुखाने पर प्राप्त होती है। अफ़ीम अनेक ऐल्केलॉयडों का सम्मिश्रण है जिनको दो मुख्य समूहों में विभाजित किया जा सकता है।

फिनैन्थ्रीन समूह : इस न्यूक्लियस के मुख्य ऐल्केलॉयड मॉर्फीन (Morphine), कोडीन और थीबेन हैं। मॉर्फीन का उपयोग अति प्राचीन काल से होता आ रहा है और यह निद्रा तथा अचेतावस्था उत्पन्न करता है। यथार्थ में इसका नामकरण यूनानियों के 'स्वप्नों के देवता'—मॉर्फीयस—पर हुआ है। अल्प मात्रा में लिए जाने पर यह केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र पर शामक के रूप में क्रिया करता है और अधिक मात्रा में स्वापक (Narcotic) की भाँति[3]।

कोडीन में मॉर्फीन से एक CH_2 समूह अधिक होता है। 1954 में लैसेग्ना और बीचेर ने यह खोज की कि कोडीन न तो स्वापक है और न ही यह व्यसन उत्पन्न करता है। वेदनाहरण में मॉर्फीन की तुलना में कोडीन को प्राथमिकता दी जाती है। इस खोज के आधार पर वैज्ञानिकों ने अफ़ीम के ऐल्केलॉयडों की संरचना में अनेक परिवर्तन करके नवीन यौगिकों का संश्लेषण और उनकी सक्रियता का अध्ययन किया। इसका डाइ-ऐसीटिल व्युत्पन्न हिरोइन (Heroin) कहलाता है। थीबेन आक्षेप उत्पन्न कर सी० एन० एस० पर उद्दीपक प्रभाव डालता है।

2.2 1-बेंज़िल-आईसोक्विनोलीन समूह : इस वर्ग के मुख्य अफ़ीम ऐल्केलॉयड पपैवरीन और नारकोटीन हैं। पपैवरीन ऐल्केलॉयडों का केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र पर कोई प्रभाव नहीं होता है पर इसका उपयोग चिकित्सा में पेशी की ऐंठन दूर करने (उद्वेष्टहारक, antispasmodic) में प्रायः किया जाता है।

2.3 मॉर्फीनेन एवं 6, 7-बेन्ज़ोमॉर्फीनेन यौगिक : मॉर्फीन संरचना में से ईथर सेतु तथा परिधीय समूह को पृथक करने पर इसके वेदनाहरण गुण में कोई कमी नहीं आती। इस प्रेक्षण के आधार पर नये मॉर्फीन-सदृश यौगिक, 'मॉर्फीनेन', संश्लेषित किये गये जिनमें ईथर सेतु नहीं है और इनमें उच्च श्रेणी का वेदनाहरण गुण पाया गया है। ग्रेवे और उसके सहयोगियों ने मॉर्फीन से अधिक शक्तिमान, N-मेथिल मॉर्फीनेन, का संश्लेषण किया।। 3-हाइड्राक्सी व्युत्पन्न क्रियाशीलता में मॉर्फीन से भी अधिक उत्तम है। इसका वामावर्त (—) समावयवी अफ़ीम से चार गुना अधिक प्रभावी है और चिकित्सा में इसका उपयोग होता है। दक्षिणावर्ती (+) समावयवी कासरोधी (antitussive) की तरह प्रयोग किये जाते हैं।

यौगिकों का दूसरा समूह 6, 7-बेन्ज़ोमॉर्फेन है जिसमें ऐलिसाइक्लिक वलय दो या अधिक समूहों से प्रतिस्थापित है। इनकी वेदनाहरण क्रियाशीलता अधिक होती है। ई० एल० मे ने इस प्रकार की अनेक नवीन औषधियों का संश्लेषण किया। बेन्ज़ोमॉर्फेन टेट्राहाइड्रोनैफ्थिलीन के व्युत्पन्न हैं।

2.4. बेन्ज़ोडाइऐज़ेपीन एवं सम्बन्धित यौगिक : इस समूह के यौगिक प्रारम्भ में 1933 में संश्लेषित किये गये। क्लोरडाइऐज़ेपॉक्साइड[4] और डाइएज़ेपाम[5] इस शृंखला के आदर्श एवं मूल रूप

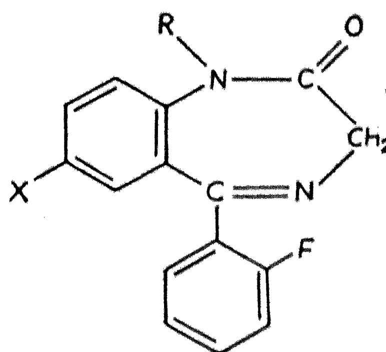
हैं जिनका प्रयोग क्रमशः 1960 तथा 1964 में चिन्ता एवं तनाव के उपचार के लिए किया गया। क्लोरडाइऐजेपॉक्साइड का 'लिब्रियम' के नाम से मनश्चिकित्सा में अत्यधिक उपयोग किया गया है। इस वर्ग के दूसरे अधिक सक्रिय सी० एन० एस० कर्मकों की संरचना मुख्य रूप से दो प्रकार की है।

(i) 2—ऐमीनो—3H—1, 4—बेन्ज़ोडाइऐज़ेपीन, एवं

(ii) 1, 3—डाइहाइड्रो—2H—1, 4—बेन्ज़ोडाइऐज़ेपीन—2—ओन

उपर्युक्त संरचना वाले कई यौगिक, यथा नाइट्रऐज़ेपीन एवं आक्सऐज़ेपीन निद्राकारी के रूप में चिकित्सा में प्रयुक्त होते हैं।

1, 4—बेन्ज़ोडाइऐज़ेपीन यौगिकों के रसायन एवं भेषजविज्ञान पर वर्तमान में अत्यधिक खोज की जा रही है। एक महत्वपूर्ण प्रेक्षण के अनुसार फ्लोरीन का प्रतिस्थापन चिकित्सा में उपयोगी सिद्ध होता है।



I

(a) R=CH_3; X=Cl
(b) R=$CH_2CH_2CNEt_2$ X=Cl
(c) R=CH_3; X=NO_2

क्लोरडाइऐज़ेपॉक्साइड (Ia) नींद की गोलियों के रूप में बेचा जाता है, फ्लोरऐजेपाम (Ib) अनिद्रा (Insomnia) के उपचार में प्रयुक्त होता है। यह क्लोरल हाइड्रेट से अधिक प्रभावी है तथा साधारण विषाक्त गुणों से रहित होता। फ्लूनिडाऐज़ेयाम (Ic) एक महत्वपूर्ण निद्राकारी औषधि है। 2, 6—डाइफ्लोरो व्युत्पन्न प्रशान्तक के रूप में डाइऐज़ेपाम से भी अधिक प्रभावी हैं तथा रसायनों से उत्पन्न आक्षेपों के प्रति आक्षेपरोधी हैं।

स्टर्नबाख एवं उनके सहयोगी तथा रैंडल एवं उनके सहयोगियों ने अनेक नूतन बेन्ज़ोडाइऐज़ेपीन का संश्लेषण किया और इनमें से कई यौगिक केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र को यथेष्ट रूप से प्रभावित करते हैं। रैंडल की खोजों से यह भी पता चला कि 1, 3, 4, 5—टेट्राहाइड्रो—2H—1, 4—बेन्ज़ोडाइऐज़ेपीन के व्युत्पन्न अपेक्षाकृत कुछ कम सक्रिय होते हैं। पिछले कुछ वर्षों में बेन्ज़ोडाइऐज़ेपीन व्युत्पन्नों की संरचना में

अनेक परिवर्तन करके उनकी सक्रियता पर पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन किया गया है[6, 7]। हाइन्डल ने 1971 में तथा मिल्कोवस्की ने 1975 में क्रमश: वेदनाहारक एवं प्रशान्तक फ्लोरीन युक्त बेन्जोडाइ-ऐजेपीन यौगिकों का संश्लेषण किया। हाल ही में (1979) अनेक शामक, उद्वेष्टहर (spasmolytic), अवसादक एवं आक्षेपरोधी व्युत्पन्नों का संश्लेषण किया गया है।

2.5 **बार्बिट्यूरेट एवं हाइडैन्टॉइन यौगिक** : चिकित्सा में प्रयुक्त होने वाले कर्मकों में बार्बिट्यूरिक अम्ल के व्युत्पन्नों का महत्वपूर्ण स्थान है। इस श्रृंखला का प्रथम यौगिक बार्बिटॉल 1903 से ही लगातार प्रयोग में आ रहा है। बार्बिट्यूरेट यौगिक मुख्यतया निद्रापक हैं परन्तु ये शामक और संवेदनाहारी गुण युक्त भी पाये गये हैं। वर्तमान में एक दर्जन से भी अधिक बार्बिट्यूरेट यौगिक चिकित्सा में प्रयुक्त हो रहे हैं।

बार्बिट्यूरिक अम्लों में 5–स्थान पर ऐरोमैटिक प्रतिस्थापन के फलस्वरूप पेशीशिथिलन सक्रियता (Muscle Relaxant Activity) उत्पन्न होती है। 5 — एथिल—5—(m – ट्राइफ्लोरोमेथिल फेनिल) बार्बिट्यूरिक अम्ल इन यौगिकों में उल्लेखनीय है। 1971 में विदा एवं उनके सहयोगियों ने फ्लोरीन युक्त बार्बिट्यूरिक अम्ल के व्युत्पन्नों का संश्लेषण किया जिनमें आक्षेपरोधी सक्रियता पाई जाती है।

2 – कार्बोनिल समूह का प्रतिस्थापन थायोकार्बोनिल से करने पर यौगिकों की लिपिड में विलय-शीलता बढ़ने के कारण थायोबार्बिट्यूरेट अधिक सक्रिय एवं तुलनात्मक रूप से अच्छे शामक-निद्रापक सिद्ध हुए हैं।

हाइडैन्टाइन वलय बार्बिट्यूरेट से एक कार्बन छोटा होता है पर आश्चर्य की बात है कि इनमें निद्रापक गुणों के बदले आक्षेपरोधी गुण पाये जाते हैं। इस वर्ग का एक प्रमुख यौगिक फेनिलटॉइन है जो अपस्मार (Epilepsy) के उपचार में काम आता है।

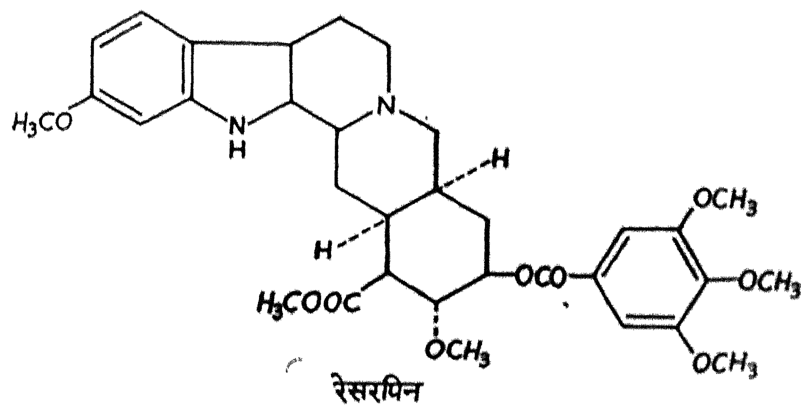
स्नाइडर एवं साथियों ने उल्लेखनीय पेशीशिथिलक ऐमीनो-हाइडैन्टॉइन यौगिकों का संश्लेषण किया। हाल ही में (1980) केनिशी ने अनेक फ्लोरीन युक्त हाइडैन्टॉइन व्युत्पन्नों का संश्लेषण किया है जिनमें प्रशान्तक, शामक, अतिरिक्त दाबरोधी एवं वेदनाहारक सक्रियता पाई जाती है।

थायोबार्बिट्यूरेट तथा हाइडैन्टॉइन वर्ग के जिन अनेक यौगिकों में उपयोग हो रहा है उनमें से कुछ प्रमुख हैं—थायोपेंटल (Thiopental), थायामिलल (Thiamylal), ट्रांसिथल (Transithol), केमिथल (Kemithal), थायोनैरकॉन (Thionarcon), निरवानोल (Nirvanol), डाइलैंटिन (Dilantin) इत्यादि।

3. प्रबल मानसिकी शामक (Neuroleptics)

ये औषधियाँ विखंडित मनस्कता (Schizophrenia) के रोगियों में उत्तेजना एवं घबराहट को कम करने में सहायक होती हैं। ये मस्तिष्क के हाइपोथलैमस (Hypothalamus) भाग पर प्रभाव डालती हैं जो व्यवहार एवं भावना पर नियन्त्रण रखता है। इस प्रकार के यौगिक निम्न श्रेणियों में बाँटे जा सकते हैं।

3.1 **रौवॉल्फिया ऐल्केलॉयड :** प्राचीन काल ही से भारतीय चिकित्सा पद्धति में अनेक प्रकार की मानसिक व्याधियों में सर्पगंधा (**रौवॉल्फिया सर्पेन्टिना**) की जड़ों का उपयोग किया जाता रहा है। सर्पदंश, ज्वर, हैजा, प्रवाहिका आदि के उपचार के साथ ही यह शामक तथा चिन्ता स्थिति (anxiety state) को दूर करने के लिए कर्मक के रूप में प्रयोग किया जाता रहा है। 1930 में तिब्बिया कालेज, दिल्ली में सिद्दीकी ने रौवॉल्फिया पादप समूह के पाँच ऐल्केलॉयडों को पृथक करने में सफलता प्राप्त की[8]। 1941 में कुमारी मुखर्जी (वर्तमान में प्रोफेसर श्रीमती असिमा चटर्जी) ने इसी समूह से रौवॉल्सीन को खोजा जो बाद में α-योहीम्बीन का समरूप पाया गया। चोपड़ा तथा अन्य भारतीय वैज्ञानिकों ने सर्पगंधा के निष्कर्ष के औषधीय गुणों का अध्ययन किया[9]। इस निष्कर्ष का शामक के रूप में प्रयोग किया गया। भारतीय वैज्ञानिकों की इन खोजों की ओर देश-विदेश के अनेक वैज्ञानिकों का ध्यान गया। अन्तत: 1952 में श्लिटलर तथा उनके सहयोगियों को रेसरपिन को पृथक करने में सफलता मिली। सर्पगंधा के निष्कर्ष के औषधीय गुणों एवं शामक प्रभाव के लिए रेसरपिन ही मुख्यतया उत्तरदायी है और इस शताब्दी की एक महत्वपूर्ण खोज है।



रेसरपिन

1956 में प्रख्यात अमेरिकन रसायनज्ञ वुडवर्ड ने रेसरपिन का संश्लेषण किया[10]। इस संश्लेषण से रेसरपिन से मिलते-जुलते अनेक यौगिकों को संश्लेषित करने का मार्ग प्रशस्त हुआ।

प्रारम्भ में रेसरपिन सबसे महत्वपूर्ण प्रशान्तक माना गया पर बाद में यह अनुभव हुआ कि इसमें कुछ अवसादक गुण भी हैं। रेसरपिन के प्रभाव बायोजेनिक ऐमीनों—जैसे कैटेकोलामीन तथा 5—HT से सम्बन्धित हैं। इसके सेवन करने पर नींद आती है और मनुष्य अपने वातावरण के प्रति उदासीन रहता है।

रेसरपिन से सम्बन्धित कुछ अन्य प्रमुख व्युत्पन्न हैं : डेसरपिडीन (Deserpidine), रेसिनामीन (Rescinnamine), डेकासर्पिल (Decaserpyl), सिंगोसर्प (Singoserp) आदि।

रौवॉल्फिया ऐल्केलॉयडों के सहधर्मियों के विश्लेषण से कुछ रोचक तथ्य सामने आये हैं, जैसे :

(i) डेसरपिडीन रेसरपिन के समान ही क्रियाशील है अत: वलय A में —OCH_3 समूह की उपस्थिति आवश्यक नहीं लगती है।

(ii) अगर $-OCH_3$ समूह 10 स्थान के बजाय 11 स्थान पर हो (जैसे डेकासर्पिल में) तो यौगिक मुख्यतया दाबह्रासी होता है ।

(iii) रेसिनामीन मात्रानुसार रेसरपिन और डेसरपिडीन से कम शक्ति का होता है पर गुणात्मक रूप से समान क्रिया करता है ।

(iv) सिगोसर्प रेसरपिन के समान ही क्रियाशील है ।

3.2 फिनोथायज़ीन व्युत्पन्न (Phenothiazine Derivatives) : न्यूरोलेप्टिक गुण वाले फिनोथायज़ीन यौगिकों में सबसे बहुचर्चित व्युत्पन्न क्लोरप्रोमेज़ीन (Chlorpromazine) है । प्रारंभ में दूसरी औषधियों जैसे प्रतिहिस्टामीन एवं बार्बिट्यूरेटों के साथ इसका उपयोग किया जाता था । 1953 से यह चिकित्सा में प्रबल मानसिकी शामक के रूप में प्रयोग किया जा रहा है । इसके रोचक गुणों तथा चिकित्सीय उपयोग के कारण वैज्ञानिकों का ध्यान फिनोथायज़ीन व्युत्पन्नों की ओर उन्मुख हुआ एवं इसके अनेक नूतन व्युत्पन्नों का संश्लेषण कर उनके औषधीय गुणों की जाँच की गई । इस वर्ग के कुछ प्रमुख यौगिक—जिनका चिकित्सा में उपयोग किया जा रहा है—प्रोमेथेज़ीन (Promethazine), प्रोमेज़ीन (Promazine), डाइथेज़ीन (Diethazine), मेपेज़ीम (Mepazine), ट्राइफ्लुओ प्रोमेज़ीन (Trifluo promazine), ट्राइफ्लुओपैरेज़ीन (Trifluoperazine) आदि हैं ।

इन सभी यौगिकों में समान मूल कार्बन संरचना होती है तथा एक अतिरिक्त क्षारीय प्रतिस्थापक वलय नाइट्रोजन से लगा होता है ।

3.3 थायोज़ेन्थीन व्युत्पन्न (Thioxanthene Derivatives) : पिछले कुछ वर्षों में इस बात का प्रयत्न किया गया कि फिनोथायज़ीन न्यूक्लियस से मिलते-जुलते नये यौगिकों का संश्लेषण किया जाय । इस दृष्टि से थायोज़ैन्थिन व्युत्पन्न बनाये गये जिनमें फिनोथायज़ीन का सल्फ़र परमाणु तो रहता है पर नाइट्रोजन नहीं होता है । इन यौगिकों में शामक गुण पाये गये हैं । इस प्रकार के अनेक नूतन वलय बनाये गये हैं जैसे क्लोरप्रोथीसीन (Chlorprothixene), फ्लूपेनथीसोल (Flupenthixol), थायोथीसीन (Thiothexene) । हाल ही में ऐटकिन्सन और वेल ने इस प्रकार के कुछ विलक्षण यौगिकों का संश्लेषण किया है ।

3.4 ब्यूटिरोफिनोन व्युत्पन्न : 1959 में यानसेन ने γ-ऐमीनोब्यूटिरिक अम्ल से सम्बन्धित अनेक ब्यूटिरोफिनोन व्युत्पन्नों को केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र अवसादक गुणों के लिये अध्ययन किया ।[11] इनसे सिद्ध हुआ कि ब्यूटिरोफिनोन व्युत्पन्नों में मॉर्फीन एवं क्लोरप्रोमेज़ीन दोनों के समान गुण हैं, अतः ये अधिक उपयुक्त हैं । कई फ्लोरीन युक्त ब्यूटिरोफिनोन व्युत्पन्न मनोविक्षिप्त तथा विखंडित मनस्कता के रोगियों के उपचार में और संवेदनाहरण में प्रयोग किये जाते हैं । इनमें कुछ महत्वपूर्ण औषधियाँ हैं : एज़ीप्रोन (Azeprone), बेन्ज़पेरिडॉल (Benzperidol), हैलोपेरिडॉल, (Helloperidol), फ्लूएनिसोन (Fluanisone), फ्लोरोपिपामाइड (Fluoropipamide), क्लोफ्लूपेरॉल (Clofluperol), स्पाइपेरोन (Spiperone), ट्राइफ्लूपेरिडॉल (Trifluperidol) आदि ।

यानसेन के अध्ययनों से पता लगा कि ब्यूटिरोफिनोन भेषजगुणवैज्ञानिकी के अनुसार फिनोथायज़ीन व्युत्पन्नों से मिलते हैं । 1966 में क्रिस्टेनसन ने एक सरल संरचना वाला ब्यूटिरोफिनोन संश्लेषित किया

जो हेलोपेरिडॉल से मिलता-जुलता है लेकिन यह रेसरपिन द्वारा प्रेरित अल्पतसता (Hypothermia) को रोकता है।

हाल ही में इन यौगिकों से मिलते-जुलते अनेक सक्रिय यौगिकों की खोज हुई है। इनमें से कुछ यौगिकों में हैलोपेरिडॉल के पिपेरिडिन न्यूक्लियस को अन्य दूसरे वलयों द्वारा प्रतिस्थापित किया गया है। पिछले 3-4 वर्षों में कई रोचक यौगिकों का संश्लेषण किया गया है। इनमें कुछ उल्लेखनीय हैं : 1978 में थरपे और कास्टनर द्वारा एक विशिष्ट प्रशान्तक क्लोरोपिरोन (Cloroperone AHR) का संश्लेषण, काइबुर्ज द्वारा 1979 में एक न्यूरोलेप्टिक पिपराजिनिल ब्यूटिरोफिनोन का संश्लेषण तथा यामामोटो द्वारा 1979 में पिपरिडिनों व्युत्पन्नों का संश्लेषण जो सी० एन० एस० अवसादक, साइकोट्रोपिक एवं प्रशान्तक हैं।

3·5 पिपेरिडीन एवं मॉर्फोलीन व्युत्पन्न : पिपेरिडीन वर्ग के कुछ महत्वपूर्ण व्युत्पन्नों का चिकित्सा में प्रयोग होता रहा है जैसे ग्लूटिथीमाइड, ऐमिनो ग्लूटिथिमाइड शामक-निद्रापक के रूप में। कुछ वर्ष पहिले इसी वर्ग के एक यौगिक थैलिडोमाइड की समाचारपत्रों में व्यापक रूप से चर्चा हुई। यह औषधि गर्भवती स्त्रियों के लिये निद्रापक के रूप में प्रयुक्त होती थी पर अनेक स्त्रियों के गर्भाशय में बच्चों पर इसके नाना प्रकार के दुष्प्रभाव पड़े तथा कई बच्चे विकलांग हो गये।

इस वर्ग के कुछ प्रमुख उपयोगी यौगिक हैं : मेपेरिडीन, ऐल्फा प्रोडीन, कीटोबेमिडोन, फीनो-डॉक्सोन, ल्यूकेन, प्रोनोथेन इत्यादि जो चिकित्सा में वेदनाहरण, संवेदनाहारी तथा उद्वेष्टरोधी गुणों के कारण प्रयोग होते हैं।

4. सी० एन० एस० उद्दीपक एवं अवसादरोधी

ये सभी औषधियां केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र को उत्तेजित करती हैं। प्रथम विख्यात अवसादरोधी की खोज लगभग पच्चीस वर्ष पूर्व हुई थी। उसके बाद इस क्षेत्र में कई नवीन औषधियों का प्रयोग किया गया जिनको निम्न प्रकार से विभक्त किया जा सकता है :

(i) मोनोऐमीनो ऑक्सिडेस निरोधक (Monoamine oxidase Inhibitor, MAO)—हाइड्रेजीन व्युत्पन्न 1954 में एक महत्वपूर्ण खोज यह हुई कि अनेक हाइड्रेजीन व्युत्पन्न जो कि यक्ष्मास्तम्भी औषधियों के रूप में सुविदित थे, अवसादरोधी एवं उद्दीपक गुणों से भी युक्त पाये गये।[19] यह भी पता लगा कि इसका प्रमुख कारण इन यौगिकों द्वारा एक एन्जाइम—मोनोऐमीनो ऑक्सिडेस—का नष्ट होना है जो प्रचुर मात्रा में मस्तिष्क में पाया जाता है। साथ ही मस्तिष्क में एक ऐमीन—नॉरएपिनेफ्रीन—की मात्रा बढ़ जाती है। पिछले दो दशकों में जीवरसायनी के सन्दर्भ में मस्तिष्क की क्रिया-विधि के सम्बन्ध में हमारे ज्ञान में प्रचुर वृद्धि हुई है और यह पता लगा है कि मस्तिष्क में 'ऐमीनों' की मात्रा तथा मानसिक विकारों में घनिष्ट सम्बन्ध है। यक्ष्मा के इलाज में एक प्रमुख औषधि है—इप्रोनियोजिड (Iproniazid) जिसके सेवन से मरीजों में एक उमंग की अनुभूति होती है। अन्य औषधियाँ हैं : निलामाइड (Nilamide), आइसोकार्बोक्साजिड (Isocarboxazid), पिवाजिड (Pivazid)।

(ii) त्रिचक्रीय अवसादरोधी (Tricyclic antidepressants) : वे फिनोथायज़ीन सहधर्मी जिनमें नाइट्रोजन परमाणु तो है परन्तु सलफर नहीं है, या दोनों ही नहीं हों, अवसादरोधी के समान प्रभावित करते हैं। इस श्रेणी के मुख्य यौगिक हैं : ऐमिट्रिप्टिलीन (Amitriptyline), इमिप्रामिन (Imipramine) तथा इप्रिनडोल (Iprindole)।

प्रथम श्रेणी के अवसादरोधियों की अपेक्षा दूसरी श्रेणी वाले यौगिक अधिक प्रयोग में लाये जाते हैं क्योंकि इनके साथ खाने-पीने की सावधानियां नहीं बरतनी पड़तीं।

(iii) ऐम्फिटैमीन (Amphetamines) : यह सुविदित है कि अनेक ऐमीन यौगिक सी० एन० एस० उद्दीपक सक्रियता युक्त होते हैं। ये यौगिक ऊपर वर्णित दोनों श्रेणियों के यौगिकों से भिन्न प्रकार प्रभाव दिखाती हैं। इनके सेवन से रोगी की शक्ति, स्फूर्ति, एवं सजगता बढ़ती है परन्तु ये रोगी की अवनमित स्थिति को पूरी तरह से दूर करने में सक्षम नहीं होतीं। इस श्रेणी के कुछ मुख्य यौगिक हैं : एम्फिटैमीन, एफिड्रीन (Ephidrine) तथा मेथिल एम्फिटैमीन (Methyl amphetamine)।

5. विभ्रमजनक (Hallucinogens) अथवा साइकोटोमिमेटिक (Psychotomimetic Drugs) औषधियाँ

इन औषधियों के सेवन से मनुष्य को मतिभ्रम (delusion) पैदा होता है। उसको घबराहट, व्याकुलता, असाधारणता का बोध होता है। कभी वह उत्तेजित हो जाता है और कभी बिल्कुल अवनमित। चूंकि इन यौगिकों से मनुष्य मनोविक्षिप्त का सा व्यवहार करने लगता है इसलिये इन्हें साइकोटोमिमेटिक औषधियाँ भी कहते हैं।

संसार के अनेक देशों में अति प्राचीन काल से उत्सवों और त्यौहारों के अवसरों पर वृक्षों के विभिन्न भागों का सेवन करने की प्रथा रही है जिससे उत्सव का उन्हें पूरी तरह से आनन्द आ सके और ऐसा माहौल बने कि "हम वहां हैं जहां से खुद हमको, आप अपनी ख़बर नहीं आती।" इसका राज़ अब कार्बनिक रसायनज्ञों ने पता लगा लिया है और इन पेड़ों से रासायनिक तत्व पृथक किये जा चुके हैं। अधिकांशतः विभ्रमजनक प्राकृतिक उद्गम के हैं और अब इनसे मिलते-जुलते यौगिकों का भी संश्लेषण कर लिया गया है।

5.1 प्राकृतिक साइकोटोमिमेटिक यौगिक : इनमें मुख्य हैं :

(i) **कैनॉबिस सटाइवा** (Cannabis sativa) : इस पौधे के कई भागों का प्राचीन काल से भारतीय योगी इसके प्रभाव के कारण प्रयोग में लाते रहे हैं। इस पेड़ की सूखी पत्तियों को भाँग कहते हैं, नयी पत्तियों एवं फूलों से गाँजा प्राप्त होता है और लीसे (resin) से चरस और हशीश। इनके सेवन से मनुष्य में सुखाभास, भावनात्मक उतार-चढ़ाव, उत्तेजना आदि देखी जा सकती है। इसमें मुख्य यौगिक (—)-9-ट्रांस-टेट्राहाइड्रोकैनाबिनोल [(—)-9-trans-tetrahydrocannabinol $\triangle^9$ THC] है।

(ii) **एरीथ्रो ज़ाइलोन कोका** (Erythroxylon coca) : सदियों से इसका उपयोग दक्षिण अमेरिका में मजदूरों की कार्यक्षमता बढ़ाने के लिए किया जाता रहा है। इससे कोकेन (cocaine) प्राप्त

(ii) त्रिचक्रीय अवसादरोधी (Tricyclic antidepressants) : वे फिनोथायज़ीन सहधर्मी जिनमें नाइट्रोजन परमाणु तो है परन्तु सलफर नहीं है, या दोनों ही नहीं हों, अवसादरोधी के समान प्रभावित करते हैं। इस श्रेणी के मुख्य यौगिक हैं : ऐमिट्रिप्टिलीन (Amitriptyline), इमिप्रामिन (Imipramine) तथा इप्रिनडोल (Iprindole)।

प्रथम श्रेणी के अवसादरोधियों की अपेक्षा दूसरी श्रेणी वाले यौगिक अधिक प्रयोग में लाये जाते हैं क्योंकि इनके साथ खाने-पीने की सावधानियां नहीं बरतनी पड़तीं।

(iii) ऐम्फिटैमीन (Amphetamines) : यह सुविदित है कि अनेक ऐमीन यौगिक सी० एन० एस० उद्दीपक सक्रियता युक्त होते हैं। ये यौगिक ऊपर वर्णित दोनों श्रेणियों के यौगिकों से भिन्न प्रकार प्रभाव दिखाती हैं। इनके सेवन से रोगी की शक्ति, स्फूर्ति, एवं सजगता बढ़ती है परन्तु ये रोगी की अवनमित स्थिति को पूरी तरह से दूर करने में सक्षम नहीं होतीं। इस श्रेणी के कुछ मुख्य यौगिक हैं : एम्फिटैमीन, एफिड्रीन (Ephidrine) तथा मेथिल एम्फिटैमीन (Methyl amphetamine)।

5. विभ्रमजनक (Hallucinogens) अथवा साइकोटोमिमेटिक (Psychotomimetic Drugs) औषधियाँ

इन औषधियों के सेवन से मनुष्य को मतिभ्रम (delusion) पैदा होता है। उसको घबराहट, व्याकुलता, असाधारणता का बोध होता है। कभी वह उत्तेजित हो जाता है और कभी बिल्कुल अवनमित। चूंकि इन यौगिकों से मनुष्य मनोविक्षिप्त का सा व्यवहार करने लगता है इसलिये इन्हें साइकोटोमिमेटिक औषधियाँ भी कहते हैं।

संसार के अनेक देशों में अति प्राचीन काल से उत्सवों और त्यौहारों के अवसरों पर वृक्षों के विभिन्न भागों का सेवन करने की प्रथा रही है जिससे उत्सव का उन्हें पूरी तरह से आनन्द आ सके और ऐसा माहौल बने कि "हम वहां हैं जहां से खुद हमको, आप अपनी ख़बर नहीं आती।" इसका राज़ अब कार्बनिक रसायनज्ञों ने पता लगा लिया है और इन पेड़ों से रासायनिक तत्व पृथक किये जा चुके हैं। अधिकांशतः विभ्रमजनक प्राकृतिक उद्गम के हैं और अब इनसे मिलते-जुलते यौगिकों का भी संश्लेषण कर लिया गया है।

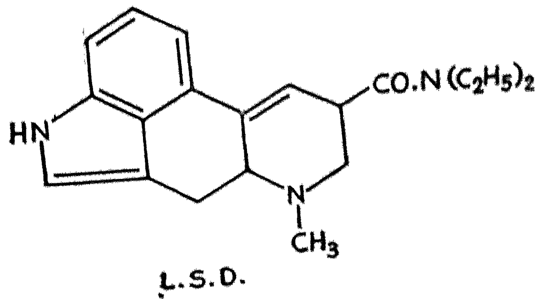
5.1 प्राकृतिक साइकोटोमिमेटिक यौगिक : इनमें मुख्य हैं :

(i) **कैनॉबिस सटाइवा** (Cannabis sativa) : इस पौधे के कई भागों का प्राचीन काल से भारतीय योगी इसके प्रभाव के कारण प्रयोग में लाते रहे हैं। इस पेड़ की सूखी पत्तियों को भाँग कहते हैं, नयी पत्तियों एवं फूलों से गाँजा प्राप्त होता है और लीसे (resin) से चरस और हशीश। इनके सेवन से मनुष्य में सुखाभास, भावनात्मक उतार-चढ़ाव, उत्तेजना आदि देखी जा सकती है। इसमें मुख्य यौगिक (—)-9-ट्रांस-टेट्राहाइड्रोकैनाबिनोल [(—)-9-trans-tetrahydrocannabinol $\triangle^9$ THC] है।

(ii) **एरीथ्रो ज़ाइलोन कोका** (Erythroxylon coca) : सदियों से इसका उपयोग दक्षिण अमेरिका में मजदूरों की कार्यक्षमता बढ़ाने के लिए किया जाता रहा है। इससे कोकेन (cocaine) प्राप्त

हुआ है। पहिले कोकेन का प्रयोग स्थानीय संवेदनाहारक के रूप में चिकित्सा में होता था पर अब अन्य यौगिक प्रयुक्त होते हैं।

(iii) **राई के ऐल्केलॉयड तथा एल० एस० डी०** (Ergot alkaloids and L. S. D.) : 1943 में एक स्विस वैज्ञानिक, अलबर्ट होफ़मान ने रोगग्रस्त राई से एक अद्‌भुत यौगिक की खोज की जिसे एल० एस० डी० कहते हैं (लाइसर्जिक एसिड डाईइमाइड Lysergic acid diethylamide)। यह अत्यन्त न्यून मात्रा (20-25 ug) में ही प्रबल भावनात्मक परिवर्तन लाता है जो कभी सुखाभास (euphonia) का रूप लेता है और कभी दुखाभास (dysporia) का। इसके सेवन से जनित अनुभवों का होफ़मान ने बड़ा मार्मिक वर्णन किया है। यह स्मरण रखने योग्य बात है कि अपने जीवन के अन्तिम दिनों में होफ़मान विक्षिप्त हो गया था।



L.S.D.

(iv) **अन्य विभ्रमजनक औषधियाँ :** इस श्रेणी में मुख्यतया ऐमीन-यौगिक आते हैं जैसे 3, 4 डाइमिथॉक्सी फ़ेनिल एथिल ऐमीन, फेनिल आइसो प्रोपिल ऐमीन, इन्डोल वर्ग के कई ऐमीन। मेस्कालीन (Mescaline) एक कैक्टस से पृथक किया गया, साइलोसाइबिन (Psilocybin) मेक्सिको के एक कुकुरमुत्ते से निकाला गया तथा अन्य विभिन्न प्रकार के कुछ प्रमुख यौगिक हैं, पिपेरिडिल बेन्ज़ीलेट (Piperidyl benzylate), एट्रोपीन (Atropine), हायोसीन (Hyosine) इत्यादि। ये यौगिक विभ्रमजनक स्थिति कम और घबराहट के लक्षण अधिक प्रगट करते हैं।

मनश्चिकित्सा का यह केवल एक ही पहलू है। अनेक वैज्ञानिकों के अथक परिश्रम से मस्तिष्क की क्रियाविधि एवं मनोविकार के कारणों से हम काफ़ी हद तक परिचित हो चुके हैं पर यह कहना गलत नहीं होगा कि "मर्ज़ बढ़ता गया ज्यों-ज्यों दवा की"।

कृतज्ञा-ज्ञापन

मैं विज्ञान परिषद् की अन्तरंग सभा का अत्यन्त आभारी हूँ जिसने मुझे यह अध्यक्षपदीय भाषण देने के लिए आमन्त्रित किया। इस भाषण की पाण्डुलिपि को तैयार करने में मुझे अपनी छात्राओं, डा० (कुमारी) रेणुका पाटनी तथा (श्रीमती) अंशु डांडिया, से विशेष सहायता मिली जिसके लिए उनका आभारी हूँ।

निर्देश

1. म्यूलर, जे० एम०, शिल्टलर ई० तथा बॉयन, एच० जे०, **एक्शपेर्यारिसिया** 1952, **8**, 338
2. बर्जर, ए०, "मेडिसिनल केमिस्ट्री", इन्टर साइंस पब्लिशर्स, इंस, न्यूयार्क 1960, पृ० 402-409
3. डेंटॉन, जे० ई० तथा बीयर, एच० के०, **जर्न० आफ अमेरिकन मेडिकल एसोशियेसन**, 1949, **141**, 1146
4. रैंडल, एल० ओ०, शॉलेक, डब्ल्यू०, हेइस्ल जो० ए०, कीथ, ई० एफ़० तथा बैगडान, आर० ई०, **जर्न० आफ फार्मोकोलोजी एण्ड एक्सपेरिमेंटल थिरेप्यूटिक्स**, 1960, **129**, 163
5. स्टर्नबाख, एल० एच०, तथा रीडर, ई०, **जर्न० आफ आर्गेनिक केमिस्ट्री**, 1961, **26**, 4936
6. हेइंडल, एन० डी०, कैरानो, आर० ए० तथा सहयोगी, **जर्न० आफ मेडिसिनल केमिस्ट्री**, 1971, **14**, 1233
7. बर्जर, ए०, "ड्रग्स अफेक्टिंग सेंट्रल नर्वस सिस्टम" मार्सल डेकर, इंस, न्यूयार्क, 1968, पृ० 237-264
8. सिद्दीकी, एस० तथा सिद्दीकी, आर० एच०, **जर्न० आफ इंडियन केमिकल सोसायटी**, 1931, **8**, 667
9. चोपरा, आर० एन०, गुप्ता, जे० सी०, बोस, बी० सी० तथा चोपरा, जे० सी०, **इंडियन जर्न० आफ मेडिकल रिसर्च**, 1943, **31**, 71
10. वुडवर्ड, आर० बी०, बेडर, एफ० ई०, बाइकल एच० तथा सहयोगी, **जर्न० आफ अमेरिकन केमिकल सोसायटी**, 1956, **78**, 2023; 2657; **टेट्राहेड्रन**, 1958, **2**, 1
11. जैंसेन, पी० ए० जे० तथा सहयोगी, **जर्न० ऑफ मेडिसिनल एंड फार्मस्यूटिकल केमिस्ट्री**, 1959, **1**, 281, 1960, **2**, 271
12. लेमेरे, एफ़०, **आर्किव्ज आफ न्यूरोलॉजी एण्ड साइक्याट्रिक**, शिचकागो, 1924, **17**, 624

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 13-18

बहुचर H-फलन के लिए एक प्रसार सूत्र

अवधेश के० सिंह
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—नवम्बर 18, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हाल ही में लेखक द्वारा परिभाषित एवं अनुशीलित कई संमिश्र चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के लिए एक प्रसार सूत्र की स्थापना करना है।

Abstract

An expansion formula for multivariable H-function in terms of Bessel polynomials. *By* Awadhesh K. Singh, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper, we aim at establishing an expansion formula for the generalized H-function of several complex variables recently defined and studied by the author (with Y. N. Prasad) [6]. The result obtained is of most general character and includes, as its particular cases, various expansion formulae for other special functions e. g. H-functions of Srivastava and Panda [7], Mittal and Gupta [3], Fox [1] etc. as well as for many other functions occurring in physical sciences.

1. प्रस्तावना

लेखक[6] ने बहुचर H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है।

$$H[x_1, \ldots, x_r] = H^{0,n:0:(M',N');\ \ldots;\ (M(r),N(r))}_{p,q:R:[P',Q'];\ \ldots;\ [P(r),Q(r)]} \left[\begin{array}{l} \{(a_p; (\alpha_p^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} :: \\ \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\} : \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \ldots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\} \\ \{(l_R; U^{(i)}_R \lambda^{(i)}_R)_{i=1,\ldots,r})\} : \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \ldots; \{(d^{(r)}_{Q(r)}, \delta^{(r)}_{Q(r)})\}\end{matrix}\middle| x_1, \ldots, x_r\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \ldots \phi_r(s_r) \psi(s_1, \ldots, s_r) \quad x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r} \, ds_1 \ldots ds_r,$$

$$\omega = \sqrt{(-1)} \qquad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{M^{(i)}} \Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^{N^{(i)}} \Gamma(1 - c_j^{(i)} + \gamma_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \Gamma(1 - d_j^{(i)} + \delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \Gamma(c_j^{(i)} - \gamma_j^{(i)} s_i)}, \; i = 1, \ldots, r, \qquad (1.2)$$

$$\psi(s_1, \ldots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^{r} \beta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^{R} \Gamma(l_j + \sum_{i=1}^{r} U_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} s_i)} \qquad (1.3)$$

यहाँ पर तथा आगे भी अन्यत्र $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \gamma_j^{(i)}, \delta_j^{(i)}, \lambda_j^{(i)}$ धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं जबकि

$a_j, b_j, c_j^{(i)}, d_j^{(i)}, l_j$ सम्मिश्र संख्याएं और $U_j^{(i)}$ को

$$U_j^{(i)} = \begin{cases} +1 \text{ यदि } \lambda_j^{(i)} s_i \text{ के } J\text{वें गुणनखण्ड में धन चिन्ह होता है,} \\ -1 \text{ यदि } \lambda_j^{(i)} s_i \text{ के } J\text{वें गुणनखण्ड में ऋणात्मक चिन्ह होता है ।} \end{cases}$$

$$J = 1, \ldots, R, \quad i = 1, \ldots, r.$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । लेखक[6] ने विभिन्न प्राचलों के अन्य प्रतिबन्धों तथा कंटूर $L_i (i = 1, \ldots, r)$ की प्रकृति के सम्बन्ध में अन्यत्र विस्तार से उल्लेख किया है । यदि हम मानें कि

$$V_i = \sum_{j=1}^{M^{(i)}} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \gamma_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^{p} \alpha_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=i}^{q}\beta_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{R}\lambda_j^{(i)}>0 \tag{1.4}$$

तो बहु-कंटूर समाकल (1.1) पूर्ण अभिसारी होता है और H-फलन को

$$|\arg x_i|<\tfrac{1}{2}\pi\, V_i\ (i=1, \ldots, r). \tag{1.5}$$

द्वारा दिए जाने वाले सेक्टरों में परिभाषित करता है। साथ ही, $(0, \ldots, 0)$ के प्रतिवेश में

$$H[x_1, \ldots, x_r]=0\ \ (|x_1|^{\alpha_1}\ldots|x_r|^{\alpha_r})\ \ (x_1, \ldots, x_r) \text{ के लिए}$$

जहाँ

$$\alpha_i=\min Re\left[d_j^{(i)}\,/\,\delta_j^{(i)}\right],\ j=1, \ldots, M^{(i)},\ i=1, \ldots, r, \tag{1.6}$$

तथा $n=0$ के लिए

$$*H[x_1, \ldots, x_r]=0\ \ (|x_1|^{\beta_1}\ldots|x_r|^{\beta_r}) \text{ क्योंकि } (x_1, \ldots, x_r)\ (\infty, \ldots, \infty)$$

के प्रतिवेश में

जहाँ
$$\beta_i=\max Re[(c_j^{(i)}-1)/\gamma_j^{(i)}],\ j=1, \ldots, N^{(i)},\ i=1, \ldots, r. \tag{1.7}$$

(1.1) के द्वारा, जब $n=0$, H-फलन को $*H$-फलन के रूप में अंकित करेंगे।

टिप्पणी 1 : (1.1) द्वारा परिभाषित H-फलन स्पष्टतः इससे पूर्व श्रीवास्तव तथा पंडा[7] द्वारा परिभाषित H-फलन का विशिष्टीकरण इस रूप में है क्योंकि इससे परिभाषित होने वाले समाकल के हर (denominator) में मिश्रित चिन्ह गामा फलन के गुणनखण्ड यथा

$$\Gamma(7+5s_1+5s_2+\ldots+5s_{r-1}-10s_r),$$

पाये जाते हैं। साथ ही इसकी विशिष्ट दशाओं के रूप में सक्सेना[5], मित्तल तथा गुप्ता[3], मौर्या[4], फाक्स[1] द्वारा परिभाषित H-फलन तथा अन्य कई फलन[2] भी समाविष्ट हो जाते हैं।

2. बहुचर H-फलन के लिए प्रसार सूत्र प्राप्त करने के लिए हम निम्नलिखित समाकल को व्यवहृत करेंगे।

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{\rho-1}\,Y_\iota(1, a; x)\,*H[z_1 x^{\rho_1}, \ldots, z_r x^{\rho_r}]\,dx$$

$$=H^{0,2:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p+2,q+1:R:[P':Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]}\left\{\begin{matrix}(1+\nu-\rho;\ \rho_1, \ldots, \rho_r),\\ \\ \{(b_q;\ (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \ldots, {}_r)\},\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(2-\nu-\rho-a;\rho_1,\ldots,\rho_r),\ldots\\ 2-\rho-a;\rho_1,\ldots,\rho_r),\ldots\end{matrix}\right| z_1,\ldots,z_r \Bigg] \tag{2.1}$$

बशर्ते कि

$$Re[\rho+\sum_{i=1}^{r}\rho_i a_i]>0;\ \rho_i>0,\ |\arg z_i|<\tfrac{1}{2}\pi V_i\ (i=1,\ldots,r)$$

जहाँ a_i एवं V_i क्रमशः (1.6) तथा (1.4) द्वारा प्रदत्त हैं और $Y_i(1, a; x)$ बेसिल बहुपद है। यहाँ तथा आगे भी $\cdots$ से यह सूचित होगा कि अन्य प्राचल वैसे ही हैं जैसे वे परिभाषा (1.1) में दिए हुए हैं।

टिप्पणी 2 : समाकल (2.1) की उपपत्ति बहुचर $*H$ फलन के लिए समाकल निरूपण करने, समाकलनों के क्रम को परिवर्तित करने तथा आन्तरिक समाकल को बेसेल बहुपद वाले ज्ञात समाकल की सहायता से मूल्यांकित करने पर आधारित है।

3. हमें जिस प्रसार सूत्र को स्थापित करना है वह है :

$$x^{\sigma}\,{}^*H[z_1 x^{\rho_1},\ldots,z_r x^{\rho_r}]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Y_m(1,a;x)}{m!\,\Gamma(2-a-m)}$$

$$H^{0,2:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p+2,q+1:R:[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]}\left[\begin{matrix}(m+a-\rho-1;\rho_1,\ldots,\rho_r)\\ \\ (-\sigma;\rho_1,\ldots,\rho_r),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(-m-\sigma;\rho_1,\ldots,\rho_r),\ldots\\ \ldots\end{matrix}\right| z_1,\ldots,z_r\Bigg], \tag{3.1}$$

बशर्ते कि

$$Re[\sigma-a+2+\sum_{i=1}^{r}\rho_i a_i]>0;\ |\arg z_i|<\tfrac{1}{2}\pi V_i,\ \rho_i>0$$

जहाँ a_i तथा V_i पूर्ववत् हैं।

उपपत्ति

माना कि

$$x^{\sigma}\,{}^*H[z_1 x^{\rho_1},\ldots,z_r x^{\rho_r}]=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\,Y_m(1,a,x), \tag{3.2}$$

यहाँ $A_m(m=0, 1, 2, \ldots)$ अचर हैं जिन्हें ज्ञात करना है। ऐसा करने के लिए हम (3.2) के दोनों पक्षों में $e^{-x}x^{1-a}\,Y(1, a, x)$ से गुणा करते हैं और फिर 0 से ∞ सीमाओं के भीतर x के प्रति समाकलित

करते हैं । अन्त में वाम पक्ष में परिणाम (2.1) के पुनर्विचार तथा दक्षिण पक्ष में बेसेल बहुपदों के लाम्बिकता गुण के प्रयोग करने से वांछित फल प्राप्त होता है ।

4. विशिष्ट दशाएं

(i) $R=0$, रखने पर हम (3.2) से श्रीवास्तव तथा पंडा[7] द्वारा प्रदत्त बहुचर H-फलन के लिए प्रसार सूत्र प्राप्त कर सकते हैं ।

(ii) यदि हम $p=0=q=R$, लें तो (1.1) द्वारा प्रदर्शित बहुचर H-फलन फाक्स के rH-फलनों के गुणनफल में टूट जाता है और तब इस गुणनफल के लिए सरलता से प्रसार सूत्र प्राप्त किया जा सकता है ।

(iii) (3.1) में विभिन्न प्राचलों के विशिष्टीकरण से तथा परिणाम

$$H_{0,1}^{1,}\left[z \middle| \begin{matrix} \\ (0,1) \end{matrix} \right] \to 1 \text{ ज्यों-ज्यों } z \to 0,$$

के पुनरावेदन से हमें

$$x^{\sigma} H_{P',Q'}^{M',N'}\left[z_1 x^{\rho_1} \middle| \begin{matrix} \{(c'_{P'}, \gamma'_{P'})\} \\ \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\} \end{matrix} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Y_m(1, a, x)}{m!\, \Gamma(2-a-m)}$$

$$H_{P'+2,Q'+1}^{M',N'+2}\left[z_1 \middle| \begin{matrix} (a+m-\sigma-1; \rho_1), (-\sigma-m; \rho_1), \{c'_{P'}, \gamma'_{P'})\} \\ \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\},)-\sigma; \rho_1) \end{matrix} \right], \tag{4.1}$$

प्राप्त होता है बशर्ते कि $Re[\sigma-a+2+\min(d_j'/\delta_j')]>0, j=1, \ldots, Q'$; जिसके और आगे विशिष्टीकरण से $\rho_1=1$ ज्ञात फल मिलता है[2] ।

(iv) इसी प्रकार बेसेल बहुपदों में हम माइजर के G-फलन का प्रसार कर सकते हैं ।

निर्देश

1. फाक्स, सी०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.

2. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The H-function with applications in Statistics and other disciplines. विले ईस्टर्न लिमिटेड नई दिल्ली, 1978

3. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इन्डियन एके० साइन्स**, 1972, **75A**, 117-123.

4. मौर्य, डी० पी०, **पी-एच० डी० थीसिस**, इन्दौर विश्वविद्यालय, 1970

5. सक्सेना, आर० के०, Kyungpook Math. J., 1974, **14**, 255-259.

6. सिंह, ए० के० तथा प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1980, **23(1)**, 69-75.

7. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा, आर०, J. Reine Angew. Math, 1976, **288**, 129-145.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 19-23

पलाश (ब्यूटिया मोनोस्पर्मा) के पौधों पर कोयले की धूल का प्रभाव

अखिलेश कुमार सिंह
वनस्पति विज्ञान उच्चानुशीलन केन्द्र
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जून 17, 1981]

सारांश

प्रस्तुत शोध-निबन्ध में पलाश (**ब्यूटिया मोनोस्पर्मा**) के पौधों पर कोयले की धूल के प्रभावों के आकलन हेतु सम्पन्न प्रयोगों का विवरण दिया गया है। क्षति के परिमाणात्मक आकलन के लिये मध्य प्रदेश के सिंगरौली कोयला-क्षेत्र में स्थित झींगुरदा कोयला खान के कोयला प्रक्रमण संयंत्र के पास उगे हुए पलाश के पौधों से पत्तियाँ एकत्रित करके उनको विश्लेषित किया गया। कोयला प्रक्रमण संयंत्र के निकटस्थ पौधों से एकत्रित पत्तियाँ गम्भीर रूप से क्षतिग्रस्त पायी गयीं, जबकि संयंत्र से दूर स्थित पौधों की पत्तियाँ कम प्रभावित थीं। प्रभावित पत्तियाँ शीर्ष तथा सीमान्त ऊतक-क्षय का विशिष्ट अभिलक्षण प्रदर्शित करती हैं। तीव्रतम प्रभाव वाले स्थानों से एकत्रित पत्तियों में यह क्षति उनके कुल क्षेत्रफल का 50 प्रतिशत तक पायी गयी। प्रभावित पत्तियों का विशिष्ट पर्णभार तथा उनमें विद्यमान पर्णहरित की मात्रा भी सामान्य से कम पायी गयी। पत्तियों की सतह पर निक्षेपित कोयले की धूल की मात्रा तथा उसके प्रभावों की तीव्रता में धनात्मक सहसम्बन्ध पाया गया।

Abstract

Effects of coal-dust pollution on *Butea monosperma*. *By* Akhilesh Kumar Singh, Centre of Advanced Study in Botany, Banaras Hindu University, Varanasi.

An attempt was made to quantify the effects of coal-dust pollution on *Butea monosperma*. For this purpose, the leaves of the test plants growing around a coal-handling plant at Jhingurda coal-mine near Singrauli, M. P. (India) were collected and analysed for quantification of damage. It was observed that leaves collected from the plants just near the coal-handling-plant were serverly da maged, while those from distant locations were less affected. The affected leaves also displayed specific

tip and marginal burning, which extended up to 50% of leaf area at most affected site. They also contained less amount of chlorophyll and had lower specific leaf weight than unaffected one. Thus a direct correlation was observed between the amount of coal-dust deposited on the leaf surface and its effects.

पेट्रोलियम की खोज से पूर्व कोयला व्यापक रूप से उपयोग में आने वाला ईंधन था। ऊर्जा संकट के वर्तमान दौर में, जब कि पेट्रोलियम के भंडार तेजी से समाप्त हो रहे हैं, यह पुनः सर्वाधिक प्रभावी ऊर्जा-विकल्प के रूप में सामने आया है। भारत जैसे विकासशील देश में, जहाँ परमाणु-विद्युत् का उत्पादन आवश्यकता से बहुत कम है और सौर ऊर्जा के उपयोग की प्रविधियाँ अपने विकास की वर्तमान अवस्था में बहुत महँगी साबित हो रही हैं, वैकल्पिक ईंधन के रूप में कोयला अद्वितीय स्थान रखता है। घरेलू अंगीठियों से लेकर विशाल ताप विद्युत् संयंत्रों तक उपयोग में आने वाला यह देश का सर्वाधिक व्यापक ईंधन है।

अपनी अतुलनीय उपयोगिता के बावजूद, कोयला प्रदूषण की गम्भीर समस्या भी उत्पन्न करता है। खनन से आरम्भ होकर इसकी छंटाई, सफाई, परिवहन तथा अंततः ईंधन के रूप में जलाये जाने पर धूल की विशाल मात्रा का उत्पादन होता है। अन्य धूलीय प्रदूषकों की भाँति कोयले की धूल द्वारा पौधों पर डाले जाने वाले प्रभावों का भी अभी तक विस्तृत अध्ययन नहीं हो सका है। राव[1] द्वारा किये गये एक प्राथमिक अध्ययन में आम तथा नींबू के वृक्षों पर इसके हानिकर प्रभावों के संकेत मिले हैं।

प्रस्तुत अध्ययन एक कोयला-क्षेत्र में किया गया है और कोयले की धूल द्वारा उस क्षेत्र की प्राकृतिक वनस्पतियों पर डाले जाने वाले प्रभावों को पलाश (ब्यूटिया मोनोस्पर्मा) की पत्तियों के विश्लेषण के आधार पर आकलित किया गया है। इसके लिये पत्तियों पर उत्पन्न क्षति के वाह्य लक्षणों, उनके शुष्क भार तथा उनमें विद्यमान पर्णहरित की मात्रा का आकलन तथा प्राप्त परिणामों का पत्तियों पर निक्षेपित धूल की मात्रा के साथ सहसम्बन्ध स्थापित किया गया है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन क्षेत्र : भारत के कोयला उत्पादन मानचित्र में सिंगरौली कोयला क्षेत्र का विशिष्ट स्थान है। यह मध्यप्रदेश के सीधी जिले में लगभग 23° 50′ अक्षांश तथा 82° 35′ देशांतर पर समुद्र की सतह से लगभग 320 फीट की ऊँचाई पर स्थित है। क्षेत्र की प्राकृतिक वनस्पति शुष्क पर्णपाती वन हैं जो औद्योगिक गतिविधियों से गम्भीर रूप से प्रभावित हुए हैं। क्षेत्र की सामान्य वृक्ष प्रजातियाँ हैं—**मधूका इंडिका, टर्मिनेलिया टोमेन्टोसा, बुखनानियाँ लैंजेन, साइजीजियम जैम्बोलाना, कैलाट्रापिस स्पीशीज, ब्यूटिया मोनोस्पर्मा इत्यादि।**

सामग्री तथा प्रविधियाँ : कोयला प्रक्रमण संयंत्र से पश्चिमाभिमुख दिशा में एक काल्पनिक सीधी रेखा पर संयंत्र से क्रमशः 0.03, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 तथा 2.5 किमी० की दूरियों पर स्थित छः विन्दु नमूने एकत्र करने के लिए चुने गये। प्रत्येक विन्दु पर लगभग समान आयु के पाँच पौधों के छत्रकों के शीर्ष, मध्य तथा अधोस्तरों से दस-दस पत्तियों के नमूने एकत्र किये गये।

प्रति इकाई क्षेत्रफल में निक्षेपित धूल की मात्रा का आकलन ज्ञात क्षेत्रफल की पत्तियों पर एकत्र धूल का भार ज्ञात करके किया गया। पर्ण क्षेत्रफल में होने वाली क्षति का आकलन पूरी तथा क्षतिग्रस्त भागों को लेखाचित्र अंकनपत्र पर रेखांकित करके किया गया। पर्णहरित की मात्रा ज्ञात करने के लिए वर्णक को 80% ऐसीटोन में निष्कर्षित किया गया और स्पेक्ट्रानिक 20 प्रकाशविद्युन् कलरीमीटर की सहायता से 645 तथा 663 एन० एम० तरंगदैर्ध्य पर निष्कर्ष का प्रकाशीय घनत्व ज्ञात कर लिया गया। प्राप्त पाठ्यांकों से मैकलैच्लैन तथा जेलिक के सूत्र[2] की सहायता से वर्णक की सांद्रता आकलित कर ली गयी। इसे मि० ग्रा० पर्णहरित प्रति ग्रा० जीवित पर्णभार के रूप में व्यक्त किया गया है। विशिष्ट पर्णभार का आकलन उष्मक में सुखायी गयी ज्ञात क्षेत्रफल वाली पत्तियों का भार ज्ञात करके किया गया। प्राप्त मानों को मि० ग्रा० प्रति से०मी०^2 के रूप में व्यक्त किया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

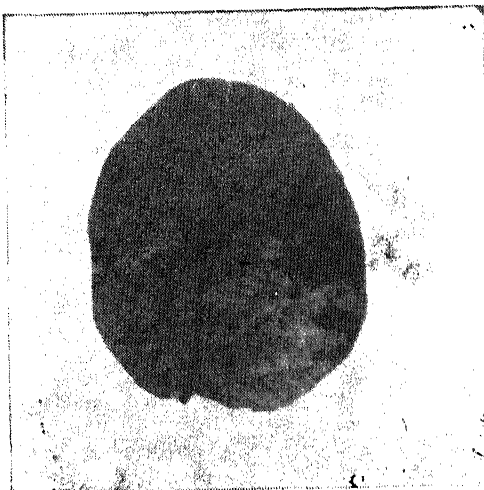
प्रदूषण स्रोत से लगभग 30 मीटर की दूरी से एकत्र की गयी पत्तियाँ कोयले की धूल से गम्भीर रूप से आच्छादित थीं और उन पर क्षति के विशेष प्रकार के चिन्ह् पाये गये। क्षति के चिन्ह् ऊतकक्षय के भूरे धब्बों के रूप में प्रायः पत्तियों के शीर्ष तथा किनारों से आरम्भ होते हैं और क्रमशः केन्द्र तथा आधार की ओर अग्रसर होते हैं। गहरे लाल की रेखा स्वस्थ तथा क्षतिग्रस्त ऊतकों को एक दूसरे से स्पष्ट रूप से अलग करती है (चित्र 1)।

आँकड़ों से स्पष्ट है कि प्रदूषण स्रोत से दूरी बढ़ने के साथ-साथ पत्तियों पर निक्षेपित धूल की मात्रा घटती जाती है। स्रोत के निकटस्थ बिन्दु पर प्रति इकाई क्षेत्रफल पर्ण सतह पर निक्षेपित धूल की मात्रा 26.5 मिलीग्राम प्रति सेमी० पायी गयी, जबकि 2.5 किमी० की दूरी पर इसका मान शून्य है।

विशिष्ट पर्णभार कोयले की धूल द्वारा प्रतिकूल रूप से प्रभावित हुआ है। स्रोत से 2.5 किमी० की दूरी से एकत्र की गई धूलरहित पत्तियों के लिए इसका औसत मान 20.6 मि०ग्रा०/सेमी०^2 पाया गया। धूल की बढ़ती हुई मात्रा के साथ-साथ यह मान कम होता गया है। स्रोत के निकटस्थ बिन्दु से एकत्रित पत्तियाँ 11.3 मि०ग्रा०/सेमी०^2 का न्यूनतम मान प्रदर्शित करती हैं।

पर्णहरित की सांद्रता भी विशिष्ट पर्णभार के समान प्रवृत्ति प्रदर्शित करती है। 2.5 किमी० की दूरी से एकत्रित धूलरहित पत्तियों के लिए इसका औसत मान 2.85 मि०ग्रा०/ग्रा० जीवित पर्णभार पाया गया। धूल की बढ़ती हुई मात्रा के साथ यह मान क्रमशः कम होता जाता है और स्रोत के निकटस्थ सर्वाधिक प्रदूषित विन्दु से एकत्रित पत्तियाँ 1.48 मिग्रा०/ग्रा० जीवित पर्णभार का न्यूनतम मान प्रदर्शित करती हैं।

पर्णिल क्षति धूल की मात्रा के साथ सीधा सहसम्बन्ध प्रदर्शित करती है। धूलरहित क्षेत्र से एकत्रित पत्तियों पर क्षति का कोई चिन्ह् नहीं पाया गया जबकि स्रोत के निकटस्थ सर्वाधिक प्रदूषित विन्दु से एकत्र की गयी पत्तियों के प्रकाशसंश्लेषी क्षेत्रफल में 49.8% तक की औसत कमी पायी गयी है।



चित्र 1 : पलाश की क्षति ग्रस्त पत्ती

कोयले की धूल द्वारा उत्पन्न पर्णिल क्षति के चिन्ह फ्लोराइड द्वारा उत्पन्न किए जाने वाले क्षति के चिन्हों से प्रबल समानता प्रदर्शित करते हैं। यद्यपि बिटूमिनो कोयले में फ्लोराइड सहित अनेक हानिकारक तथा वाष्पशील पदार्थ विद्यमान होते हैं (मीथाम[3]) तथापि अब तक यह स्पष्ट नहीं हो सका है कि ये पदार्थ पौधों को किस प्रकार प्रभावित करते हैं।

सारणी 1

पलाश (ब्यूटिया मोनोस्पर्मा) की पत्तियों पर कोयले की धूल का प्रभाव

नमूना एकत्रण स्थल	स्रोत से दूरी (किमी०)	धूल भार (मिग्रा०/सेमी०^2)	विशिष्ट पर्णभार (मिग्रा०/सेमी०^2)	पर्णहरित सांद्रता (मिग्रा०/ग्रा० जीवित पर्णभार)	पर्णिल क्षति प्रतिशत
स–1	0.03	26.5	11.30	1.48	49.8
स–2	0.50	23.4	12.00	1.50	48.5
स–3	1.00	16.2	15.2	1.84	57.4
स–4	1·50	7.30	17.9	2.32	25.6
स–5	2.00	2.00	20.00	2.84	2.9
स–6	2.50	0.00	20.6	2.85	0.00

पत्तियों की सतह पर निक्षेपित कोयले की धूल आपतित प्रकाश को अवशोषित कर लेती है (राव[1]) जिससे पर्ण सतह के ताप में वृद्धि उत्पन्न हो जाती है, लेकिन पत्तियों को वास्तविक रूप में प्राप्त होने वाले प्रकाश की मात्रा कम हो जाती है। इससे प्रकाश संश्लेषण पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ता है। कोयले की धूल द्वारा उत्पन्न ऊतक क्षय के कारण पत्तियों के प्रकाशसंश्लेषी क्षेत्र तथा पर्णहरित की मात्रा में होने वाली कमी भी प्रकाशसंश्लेषण को प्रतिकूल रूप से प्रभावित करती है। इससे अंततः विशिष्ट पर्णभार का मान कम हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक अपने गुरु प्रो० रामदेव मिश्र, भू० पू० अध्यक्ष, वनस्पति विज्ञान विभाग, काशी विश्व-विद्यालय तथा अग्रज डा० हरेन्द्रनाथ पाण्डेय, उदय प्रताप स्नातकोत्तर महाविद्यालय, वाराणसी, का उनके प्रोत्साहन तथा सुझावों के लिए हृदय से आभारी है।

निर्देश

1. राव, डी० एन० 'प्रोसीडिंग्स आफ द सेकेन्ड इन्टरनेशनल क्लीन एअर कांग्रेस'। सम्पादक एस० एम० इंगलुण्ड और डब्ल्यू० टी० बेरी, एकेडेमिक प्रेस, आई० एन० सी०; न्यूयार्क, 1971, पृष्ठ 273-276

2. मैकलैच्लैन, एस० तथा जेलिक, एस०, **कनै० जर्नल आफ बाटनी**, 1963, **41**, 1053-62.

3. मीथाम, ए० आर०, Atmospheric Pollution: Its Origin and Prevention. पर्गमान प्रेस लिमिटेड, लन्दन 1952.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 25-30

बहुपदों के कतिपय वर्ग के लिए कुछ जनक फलन

आर० सी० चन्देल
गणित विभाग, डी० वी० पोस्टग्रैजुएट कालेज, उरई
तथा
बी० एन० द्विवेदी
गणित विभाग, अतर्रा पोस्टग्रैजुएट कालेज, अतर्रा

[प्राप्त—जनवरी 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य बहुपदों के तीन सामान्य वर्गों के लिए एक अन्य सार्वीकरण प्रदान करना है।

Abstract

A note on some generating functions for certain class of polynomials. *By* R. C. Chendel, Department of Mathematics, D. V. Postgraduate College, Orai and B. N. Dwivedi, Department of Mathematics, Atarra Postgraduate College, Atarra (U. P.).

The purpose of this paper is to provide another generalization of three general classes of polynomials in the form

$$(c-mxt+yt^m)^p\, G\left[\frac{r^r y t^s}{(c-mxt+yt^m)^r}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} S_n^p\ (m, x, y, r, c)t^n$$

where m, s are positive intege rs, other parameters are unrestricted in general and $G(z)$ is given by Chandel' s polynomial[1].

1. विषय प्रवेश

सार्वीकृत हम्बर्ट बहुपदों के एक वर्ग को, जिसे

$$(C-mxt+yt^m)^p=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(m, x, y, p, C)t^n, \tag{1.1}$$

द्वारा परिभाषित करते हैं जहाँ m धनात्मक पूर्णांक है तथा अन्य प्राचल सामान्य रूप से असीमित हैं, गूल्ड[2] ने अपने अध्ययन का विषय बनाया । हाल ही में पंडा[3] ने अभी तक माने वाले कई बहुपदी निकायों को जो जैकोबी, हर्माइट तथा लागेर बहुपदियों के परिवार के माने जाते रहे हैं उन्हें एकीकृत करने के उद्देश्य से

$$\left\{S_n^c(x, r, s)/n=0, 1, 2, \ldots\right\}$$

बहुपदियों का समावेश किया जो

$$(1-t)^c\, G\left[\frac{xt^s}{(1-t)^r}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} S_n^c(x, r, s)\, t^n, \tag{1.2}$$

द्वारा जनित हैं जहाँ C यादृच्छिक प्राचल है, r कोई भी धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णांक है तथा $s=1, 2, 3m \ldots$ । दूसरी ओर श्रीवास्तव[4] ने एक सार्वीकृत हर्माइट बहुपदियों के वर्ग पर विचार किया है जो जनक फलन

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(m)}(x)\frac{t^n}{n!}=G(mxt-t^m), \tag{1.3}$$

द्वारा परिभाषित होता है जहाँ

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ c_0\neq 0, \tag{1.4}$$

तथा m यादृच्छिक धन पूर्णांक है ।

इन तीनों सामान्य वर्गों के बहुपदों को जो (1.1), (1.2) तथा (1.3) द्वारा परिभाषित हैं, चन्देल[1] ने बहुपदों के एक सामान्य वर्ग का प्रवेश किया है जिसे जनक फलन

$$(C-mxt+yt^m)^p\, G\left[\frac{r^r xt^s}{(C-mxt+yt^m)^r}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} E_n^p(m, x, y, r, s, C)\, t^n \tag{1.5}$$

द्वारा परिभाषित किया है जहाँ m, s धनात्मक पूर्णांक हैं, अन्य प्राचल असीमित है और $G(z)$ को (1.4) द्वारा सूचित किया गया है ।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य (1.1), (1.2) तथा (1.3) को (1.4) से सर्वथा भिन्न एक अन्य सार्वीकरण प्रदान करना है जिसका रूप

$$(C-mxt+yt^m)^p\, G\left[\frac{r^r y\, t^s}{(C-mxt+yt^m)^r}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} S_n^p(m, x, y, r, s, C)\, t^n, \quad (1.6)$$

हो जहाँ m, s धनात्मक पूर्ण संख्याएं हैं, अन्य प्राचल असीमित हैं और $G(z)$ को (1.4) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$r=0$ या $y=0$ होने पर (1.6) (1.1) में समानीत होता है और $x=0$ $p=-c$, $C=m=1$ के लिए (1.6) तथा (1.2) दोनों ही निम्नलिखित सम्बन्ध

$$S_n^c(x, r, s)=(-xr^{-r})^{n/(s-1)}\; S_n^{-c}(1, 0, (-1)^{s/(s-1)}r^{r/(s-1)}x^{1/(1-s)}, r, s \quad (1.7)$$

द्वारा जुड़े होते हैं।

$p=s=C=0.\ y=-r=1$, के लिए (1.6)

$$\gamma_n^m(x)=n\, S_n\,(m, x, 1, -1, 0, 0). \quad (1.8)$$

के द्वारा (1.2) से सम्बद्ध है।

संक्षेपण की दृष्टि से हम

$$S_n^p(m, x, y, r, s, C)$$

के लिए समग्र प्रपत्र में $S_n p$ लिखेंगे।

2. $\left\{S_n^p\,/n=0, 1, 2, \ldots\right\}$ बहुपद

(1.6) से प्रारम्भ करने पर

$$S_n^p=\sum_{i=1}^{[n/s]} C_1\, y^1\, r^{ri}\, P_{n-si}\,(m, x, y, p-ri, C), \quad (2.1)$$

$$S_n^{p+q}=\sum_{i=0}^{n} S_{n-1}^p\, .\, P_i\,(m, x, y, q, C), \quad (2.2)$$

$$S_n^{p_i+\cdots+p_k}=\sum_{i_1+\cdots+ik=n} S_{i_1}^{p_1}\prod_{j=2}^{k} P_{ij}\,(m, x, y, p_j, C), \quad (2.3)$$

$$S_n^{p+1} = C\, S_n^p - mx\, S_{n-1}^p + y\, S_{n-m}^p \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[sC\ S_n^p + (s-rm)\, y\, S_{n-m}^p\right] + m(r-s)x \frac{\partial}{\partial x}\ S_{n-1}^p$$

$$+ m\,[sp - r\,(n-1)]\ S_{n-1}^p = 0 \qquad (n \geqslant m) \tag{2.5}$$

$$y \frac{\partial}{\partial y}\left[sC\ S_n^p + (r-s)\, mx\, S_{n-1}^p\right] + (r-rm)\, y^2 \frac{\partial}{\partial y}\ S_{n-m}^p$$

$$= nC\ S_n^p - mx\,(n-1)\, S_{n-1}^p + y\,[n-m+sp]\ S_{n-m}^p$$

$$+ mpx\, S_{n-m-1}^p - myp\ S_{n-2m}^p\ , \ (n \leqslant m) \tag{2.6}$$

$$s\, C \frac{\partial}{\partial x}\ S_{n+m}^p + \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{mx\,(s-r)}{sC}\right]^i\ [y\ (s-rm) \frac{\partial}{\partial x}\ S_{n-1}^p + m\,\{sp - r$$

$$(n+m-i-1)\}\ S_{n+m-i-1}^p = 0 \tag{2.7}$$

तथा

$$s\, C\, y \frac{\partial}{\partial y}\, S_n^p = \sum_{i=1}^{n-2m} \left[\frac{mx\,(s-r)}{sC}\right]^i \Big[C\ (n-i)\ S_{n-1}^p - mx\,(n-i-1)\, S_{n-i-1}^p$$

$$+ y(n-i-m+ps)\ S_{n-i-m}^p + pm\left\{x\, S_{n-i-m-1}^p - y\, S_{n-i-2m}^p\right\}$$

$$+ y^2\ (rm-s)\ \frac{\partial}{\partial y}\ S_{n-i-m}^p \tag{2.8}$$

3. एक रोचक विशिष्ट दशा

(1.4) में $\quad c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \quad$ रखने पर

$$(C - mxt + yt^m)^p \exp\left[-\frac{r^r y t^s}{(C - mxt + yt^m)^r}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^p\,(m,\ x,\ y,\ r,\ s,\ C)\ t^n, \tag{3.1}$$

जिससे हमें निम्नांकित प्राप्त होते हैं

$$E_n^p(m, x, y, r, s, C) = \sum_{i=0}^{[n/s]} \frac{(-1)^i}{i!} r^{ri} y^i P_{n-si}(m, x, y, p-ri, C), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_n^p = p E_{n-m}^{p-1} - r^r E_{n-s}^{p-r} + r^{r+1} y E_{n-m-s}^{p-r-1}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_{n+1}^{p+1} + mp \ E_n^p + myr^{r+1} E_{n-s}^{p-r} = 0 \tag{3.4}$$

तथा

$$(n+1) E_{n+1}^p + mpx E_n^{p-1} + r^r sy E_{n-s+1}^{p-r} + mr^{r+1} xy E_{n-s}^{p-r-1}$$

$$= my\left[p E_{n-m+1}^{p-1} + y \ r^{r+1} \ E_{n-m-s+1}^{p-r-1}\right] \tag{3.5}$$

अन्य परिणाम जिनमें (3.1) द्वारा परिभाषित

$$E_n^p(m, x, y, r, s, C)$$

हो उन्हें पिछले अनुभाग की विधि का पालन करके व्युत्पन्न किया जा सकता है।

4. अन्य विशिष्ट दशा

(1.4) में $c_n = \frac{(q)_n}{n!}$ रखने पर

$$(C - mxt + yt^m)^p \left[1 - \frac{r^r yts}{(C-mxt+ytm)^r}\right]^{-q} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(p,\, q)}(m, x, y, r, s, C)\, t^n, \tag{4.1}$$

जिससे हमें निम्नांकित प्राप्त होते हैं :

$$F_n^{(p,\, q)} = \sum_{i=0}^{[n/s]} \frac{(q)_i}{i!} y^i r^{ri} P_{n-si}(m, x, y, p-ri, C), \tag{4.2}$$

$$F_n^{(p_1, + p_2,\, q_1+q_2)} = F_{n-k}^{(p_1,\, q_1)} F_k^{(p_2,\, q_2)}, \tag{4.3}$$

$$F_n^{(p_1+\cdots+p_k,\, q_1+\cdots+q_k)} = \sum_{i+\cdots+i=n} \prod_{j=1}^{k} F_{i_j}^{(p_{i_j},\, q_{i_j})}, \tag{4.4}$$

$$F_n^{(p,\ q+1)} = \sum_{k=0}^{[n/s]} \frac{(1)_k r^{rk} y^k}{k!} F_{n-sk}^{(p-rk,\ q)}, \tag{4.5}$$

$$F_n^{(p,\ q+1)} = \sum_{k=0}^{[n/s]} r^{rk}\ y^k\ F_{n-sk}^{(k-rk,\ q)}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ F_n^{(p,\ q)} = -mp\ \ F_{n-1}^{(p-1,\ q)} + mqr^{r+1}y\ F_{n-s-1}^{(p-r-1,\ q+1)} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\ F_n^{(p,\ q)} = F_{n-m}^{(p-1,\ q)} + qr^{r+1}y\ \ F_{n-s-m}^{(p-r+1,\ q+1)} \tag{4.8}$$

$$(n+1)\ F_{n+1}^{(p,\ q)} = -mxp\ F_n^{(p-1,\ q)} + myp\ F_{n-m+1}^{(p-1,\ q)} - qr^r ys\ \ F_{n-s+1}^{(p-r,\ q+1)}$$

$$+qr^{r+1}\ my\Big[x\ F_{n-s}^{(p-r-1,\ q+1)} - y\ F_{n-s-m+1}^{(p-r-1,\ q+1)} \tag{4.9}$$

(4.1) द्वारा परिभाषित $F_n\ (p, q)$ से युक्त परिणाम अनुभाग 2 की तरह प्राप्त किये जा सकेंगे।

उपर्युक्त दो विशिष्ट दशाओं में केवल उन्हीं परिणामों की विवेचना की गई है जिन्हें सामान्य रूप से प्राप्त नहीं किया जा सकता। इसी प्रकार (1.4) में C_n को विभिन्न मान देकर अन्य विशिष्ट दशायें प्राप्त की जा सकती हैं।

निर्देश

1. चंदेल, आर० सी०, Mat. Vernik (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)

2. गूल्ड, एच० डब्लू०, Duke Math. J., 1965, **32**, 697-712

3. पंडा, आर०, Glasgow Math. J., 1977, **18**, 105-108.

4. श्रीवास्तव, एच० एम०, Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. 1976, **79**, 457-461.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 31-37

अति s-नियमित तथा अति s-प्रसामान्य समष्टियाँ

आर० प्रसाद तथा आर० एस० यादव
गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—मार्च 2, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में कतिपय नवीन पृथक्करण अभिगृहीतों (Separation axioms) को परिभाषित किया गया है। इनके पारस्परिक एवं विद्यमान पृथक्करण अभिगृहीतों के मध्य सम्बन्धों का भी अध्ययन किया गया।

Abstract

On strongly s-regular and strongly s-normal spaces. *By* R. Prasad and R. S. Yadav, Department of Mathematics, University of Sagar.

In the present paper we have defined some new separation axioms. Their relationships among themselves and also among existing separation axioms have been studied.

सांस्थितिक समष्टि X में समुच्चय A अर्ध विवृत होता है यदि किसी विवृत समुच्चय 0 के लिए $0 \subset A \subset \mathrm{cl}\, 0$, जहाँ cl 0 से X में 0 के संवरक का अंकन होता है। प्रत्येक विवृत समुच्चय अर्ध विवृत है किन्तु इसका विलोम असत्य हो सकता है और अर्ध विवृत समुच्चयों का कोई भी संयोग अर्ध विवृत है[3]। अर्ध विवृत समुच्चय का पूरक अर्ध संवृत कहलाता है। X का उपसमुच्चय N किसी बिन्दु $x \in X$ का अर्ध प्रतिवेश कहलाता है यदि X में किसी अर्ध विवृत समुच्चय A के लिए, $x \in A \subset N$ [1]। A वाले समस्त अर्ध संवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ A का अर्ध संवरक कहलाता है और scl A द्वारा अंकित किया जाता है।[4] X में समुच्चय A के पूरक को $X-A$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

हाल ही में अर्ध $T_i (i=0, 1, 2)$ के अभिगृहीतों को T_i-अभिगृहीतों $(i=0, 1, 2)$ के ही समान परिभाषित किया गया है यदि T_i-अभिगृहीतों $(i=0, 1, 2)$ में से प्रत्येक की परिभाषा में विवृत समुच्चयों को अर्ध विवृत समुच्चयों से प्रतिस्थापित कर दिया जाय। साथ ही, प्रत्येक पादाक्षर i के लिए T_i का

अभिप्राय अर्ध T_i होगा किन्तु इसका विलोम नहीं ।[5] s-नियमित समष्टि वह है जिसमें प्रत्येक संवृत समुच्चय तथा एक विन्दु जो इसमें नहीं है, वे संधित अर्ध विवृत समुच्चयों में निहित हैं और s-प्रसामान्य समष्टि को प्रसामान्य समष्टि की परिभाषा में अर्ध विवृत समुच्चयों के स्थान में मात्र विवृत समुच्चयों को रखकर प्राप्त किया जाता है । नियमित तथा प्रसामान्य समष्टियों का अर्थ होगा क्रमश: s-नियमित तथा s-प्रसामान्य समष्टियाँ किन्तु प्रत्येक दशा में इसका विलोम सत्य नहीं है । नियमितता अभिगृहीत में संवत समुच्चय के स्थान पर नियमित संवृत समुच्चय रखने से नियमितता की परिभाषा हो जाती है ।[2]

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य दो अन्य पृथक्करण अभिगृहीतों का सूत्रपात एवं अध्ययन करना है । इन अभिगृहीतों के सम्बन्धों को विद्यमान अभिगृहीतों के साथ देखा गया है । उनके लक्षण भी प्राप्त किये गये हैं ।

1. अति s-नियमित समष्टियां

परिभाषा 1.1 : कोई सांस्थितिक समष्टि X अति s-नियमित कहलाता है यदि प्रत्येक अर्ध संवृत समुच्चय F तथा प्रत्येक बिन्दु $x \phi F$ के लिए x तथा F वाले विसंधित (disjoint) अर्ध संवृत समुच्चय U तथा V विद्यमान हों ।

उदाहरण 1.1 माना

$$X = \{a, b, c\}$$

तथा

$$T = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, X\}.$$

तो समष्टि अति s-नियमित होगा ।

टिप्पणी 1.1 चूँकि प्रत्येक संवृत समुच्चय अर्ध संवृत है अत: इसका अर्थ यह हुआ कि प्रत्येक अति s-नियमित समष्टि s-नियमित होगा । किन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है । क्योंकि

उदाहरण 1.2 माना

$$X = \{a, b, c, d, e\}.$$

तथा

$$T = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}.$$

तो समष्टि s-नियमित है किन्तु अति-s-नियमित नहीं है ।

टिप्पणी 1.2 लगभग नियमितता तथा अति-s-नियमितता स्वतन्त्र हैं । क्योंकि

उदाहरण 1.3 माना

$$X = \{a, b, c\}$$

तथा

$$T_1=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$$

तथा

$$T_2=\{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$$

X पर दो संस्थितियाँ हैं। तो समष्टि (X, T_1) अति-s-नियमित है किन्तु निकटत: नियमित नहीं है और समष्टि (X, T_2) प्राय: नियमित है किन्तु s-नियमित नहीं है।

टिप्पणी 1.3 उदाहरण 1.1 का समष्टि न तो अर्ध T_2 है न ही अर्ध T_1 एवं अर्ध T_0 किन्तु अति-s-नियमित समष्टि अर्ध T_0 सहित अर्ध T_2 के लिए आया है। अत:

प्रमेय 1.1 प्रत्येक अति s-नियमित अर्ध T_0 समष्टि अर्ध T_2 कहलाता है।

उपपत्ति : स्वत: स्पष्ट है।

परिभाषा 1.2 अति s-नियमित अर्ध T_1 समष्टि अर्ध T_3 कहलाता है।

टिप्पणी 1.4 प्रत्येक अर्ध T_3 समष्टि अति s-नियमित है किन्तु इसका विलोम सही नहीं है। क्योंकि

उदाहरण 1.4 माना

$$X=\{a, b, c\}$$

तथा

$$T=\{\phi, X, \{d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\}.$$

तो समष्टि अति s-नियमित है किन्तु अर्ध T_3 समष्टि नहीं है।

टिप्पणी 1.5 यह दिखाना सरल है कि अर्ध T_3 समष्टि को T_3 समष्टि होना आवश्यक नहीं है।

प्रमेय 1.2 प्रत्येक अर्ध T_3 समष्टि अर्ध T_2 है।

उपपत्ति प्रमेय 1.1 से प्राप्त।

प्रमेय 1.3 अर्ध T_1 समष्टि अर्ध T_1 होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $x \in X$ तथा x के प्रत्येक अर्ध प्रतिवेश U के लिए x का एक अर्ध प्रतिवेश V होता है जिससे scl $V \subset U$.

उपपत्ति : माना X एक अर्ध T_3 समष्टि है। माना $x \in X$ तथा x का अर्ध प्रतिवेश X है। तो एक अर्ध विवृत समुच्चय 0 ऐसा विद्यमान हो कि $x \in 0 \subset U$. तब $x \phi X—0$ समष्टि के अर्ध T_3 होने से विसंधित अर्ध विवृत समुच्चयों 0_1 तथा 0_2 का अस्तित्व होता है जिससे $x \in 0_1$ तथा $X-0 \subset 0_2$. माना $V=X-0_2$. तो V अर्ध संवृत है और $x \in 0_1 \subset V$। चूँकि 0_1 अर्ध विवृत है अत: $V x$ का अर्ध प्रतिवेश है। अन्त में $X-0 \subset 0_2$ तथा $V \subset 0 \subset U$。 इस प्रकार scl $V=V \subset U$.

विलोमत: कल्पना किया कि X अर्ध T_1 है। तो हमें यह सिद्ध करने की आवश्यकता है कि X अति s-नियमित है। माना $x \in X$ तथा A X का एक ऐसा अर्ध संवृत उपसमुच्चय है कि $x \notin A$। तो $x \in X-A=0$। इसका अर्थ यह हुआ कि 0 x का अर्ध प्रतिवेश है। अब x का एक अर्ध प्रतिवेश V ऐसा चुनते हैं कि $x \in V \subset$ scl $V \subset 0$। अब $U=X-$scl V रखें तो U अर्ध विवृत है तथा $U \cap V=\phi$। पुनश्च $A=X-0 \subset X-$scl $V=U$ अत: $A \subset U$ तथा $x \in V$। अतएव समष्टि अति s-नियमित है।

प्रमेय 1.4 एक सांस्थितिक समष्टि X में निम्नलिखित प्रतिबन्ध समान हैं।

(a) X अति s-नियमित है।

(b) प्रत्येक बिन्दु $x \in X$ तथा x वाले प्रत्येक अर्ध विवृत समुच्चय V के लिए एक ऐसा अर्ध विवृत समुच्चय U विद्यमान होता है कि $x \in U \subset$ scl $U \subset V$

(c) प्रत्येक अर्ध संवृत समुच्चय A के लिए A के समस्त अर्ध संवृत अर्ध प्रतिवेश का सर्वनिष्ट A है।

(d) प्रत्येक समुच्चय A तथा अर्ध विवृत समुच्चय B के लिए जिससे $A \cap B \neq \phi$, एक ऐसा अर्ध विवृत समुच्चय 0 विद्यमान है कि $A \cap 0 \neq \phi$ तथा scl $0 \subset B$।

(e) प्रत्येक अरिक्त समुच्चय A तथा अर्ध संवृत समुच्चय B के लिए जिससे $A \cap B=\phi$, विसंधित अर्ध विवृत समुच्चय L तथा M विद्यमान होते हैं जिससे $A \cap L \neq \phi$ तथा $B \cap M$.

उपपत्ति : (a)$\Rightarrow$(b)· माना V एक अर्ध विवृत समुच्चय है जिसमें x है। तो X V अर्ध संवृत है और $x \notin X-V$। चूँकि X अति s-नियमित है अत: L तथा U अर्ध विवृत समुच्चयों का अस्तित्व होता है जिसमें $X-V \subset L$, $x \in U$, तथा $L \cap U=\phi$। अब scl $U \subset$ scl $(X-L)=X-L$ अत: scl $U \subset V$·

(b)$\Rightarrow$(c). माना कि A अर्ध संवृत समुच्चय है तथा $x \notin A$ तो $X-A$ अर्ध विवृत है और x से युक्त है। तब (b) के द्वारा, अर्ध विवृत समुच्चय U ऐसा है कि $x \in U \subset$ scl $U \subset X-A$ अत: $A \subset X-$scl $U \subset X-U$ फलस्वरूप, $X-U$ अर्ध संवृत है और A का अर्ध प्रतिवेश है जिससे x का सम्बन्ध नहीं है अत: (c) सत्य है।

(c)$\Rightarrow$(d)· माना $A \cap B \neq \phi$ तथा B अर्ध विवृत है। माना $x \in A \cap B$। चूँकि x का सम्बन्ध अर्ध संवृत समुच्चय $X-B$ से नहीं है अत: $X-B$ का अर्ध संवृत अर्ध प्रतिवेश विद्यमान होता है, मान लें V, जिससे $x \notin V$ तो $X-B \subset U \subset V$, जहाँ U अर्ध विवृत है। समुच्चय $0=X-V$ तो 0 अर्ध विवृत समुच्चय है जिसमें x रहता है और इसलिए $A \cap 0 \neq \phi$ पुन:, $X-U$ के अर्ध संवृत होने से scl $0=$scl $(X-V) \subset X-U \subset B$.

(d)$\Rightarrow$(e)· यदि $A \cap B=\phi$, जहाँ A अरिक्त है तथा B अर्ध संवृत है। तो $A \cap (x-B) \neq \phi$, तथा $X-B$ अर्ध संवृत है। तो (d) के अनुसार एक ऐसा अर्ध विवृत L समुच्चय विद्यमान है कि $A \cap L \neq \phi$,

$L \subset \text{scl}L \subset X-B$ । माना $M=X-\text{scl}\ L$ तो $B \subset M$, तथा L एवं M अर्ध विवृत समुच्चय हैं जिससे $M=X-\text{scl}\ L \subset X-L$.

(e)$\Rightarrow$(a). स्पष्ट है ।

2. अति s-नियमित समष्टियाँ

परिभाषा 2.1 सांस्थितिक समष्टि X को अति s-प्रसामान्य कहा जाता है यदि X के विसंधित अर्ध संवृत समुच्चयों F_1 तथा F_2 के प्रत्येक युग्म के लिये विसंधित अर्ध विवृत समुच्चय U तथा V विद्यमान हैं जिससे कि $F_1 \subset U$ एवं $F_2 \subset V$.

उदाहरण 1.3 का समष्टि (X, T_1) अति s-प्रासामान्य है ।

टिप्पणी 2.1 प्रसामान्य एवं अति s-प्रसमान्य के अभिगृहीत स्वतंत्र हैं । क्योंकि

उदाहरण 2.1 माना

$$X=\{a, b, c, d\}$$

तथा

$$T=\{\phi, \{a\}, \{c\}. \{a, c\}, \{a, b, d\}, X\}$$

तो समष्टि प्रसामान्य है किन्तु अति s-प्रसामान्य नहीं है।

उदाहरण 2.2 माना

$$X=\{a, b, c, d\}$$

तथा

$$T=\{\phi, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

तो समष्टि अति s-प्रसामान्य है किन्तु सामान्य नहीं है ।

टिप्पणी 2.2 अति s-प्रसामान्यता के अभिगृहीत का अर्थ अति s-नियमितता का अभिगृहीत नहीं लेना होगा क्योंकि

उदाहरण 2.3 माना

$$X=\{a, b, c, d\}$$

तथा

$$T=\{\phi, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

तो समष्टि अति s-प्रसामान्य है किन्तु अति s-नियमित नहीं है ।

हम देखते हैं कि उदाहरण 1.1 का समष्टि अति s-प्रसामान्य है किन्तु अर्ध T_1 नहीं है ।

परिभाषा 2.2 सांस्थितिक समष्टि X जो अति s-प्रसामान्य होने के साथ ही अर्ध T_1 है अर्ध T_4 कहलाता है ।

उदाहरण 2.2 का समष्टि अर्ध T_4 किन्तु T_4 नहीं है। अतः अर्ध T_4 के अभिगृहीत से T_4 नहीं समझना होगा।

प्रमेय 2.1 प्रत्येक अर्ध T_4 समष्टि अर्ध T_3 समष्टि होता है।

उपपत्ति : माना X अर्ध T_4 तथा अर्ध T_1 समष्टि है। माना F एक अर्ध संवृत उप समुच्चय है X तथा $x \phi F$ का। स्पष्ट है कि $\{x\}$ अर्ध संवृत है। इसलिए $\{x\}$ तथा F X में विसंधित अर्ध संवृत समुच्चय है। अब परिणाम अति s-प्रसामान्यता की परिभाषा के अनुसार होगा।

प्रमेय 2.2 प्रत्येक अति s-प्रसामान्य समष्टि s-प्रसामान्य हैं।

उपपत्ति : माना F_1 तथा F_2 X के विसंधित संवृत उपसमुच्चय हैं। चूँकि प्रत्येक संवृत समुच्चय अर्ध संवृत है, जिसका अर्थ है कि F_1 तथा F_2 विसंधित अर्ध संवृत समुच्चय हैं। इसका परिणाम अति s-प्रसामान्यता की परिभाषा का अनुसरण करता है।

टिप्पणी 2.3 सम्भव है प्रमेय का विलोम लागू न हो सके क्योंकि उदाहरण 2.1 का समष्टि अति s-प्रसामान्य नहीं है किन्तु s-प्रसामान्य है। चूँकि $\{d\}$ तथा $\{c, b\}$ विसंधित अर्ध संवृत समुच्चय हैं जिनमें उनसे युक्त विसंधित अर्ध विवृत समुच्चय नहीं होते।

प्रमेय 2.3 अर्ध T_1 समष्टि अर्ध T_4 है यदि और केवल यदि ऐसे प्रत्येक अर्ध संवृत समुच्चय C तथा प्रत्येक अर्ध विवृत समुच्चय U के लिए जिससे $C \subset V$ एक अर्ध विवृत समुच्चय V विद्यमान होता है जिससे $C \subset V \subset \text{scl } V \subset U$.

उपपत्ति : माना कि X एक अर्ध T_4 समष्टि है तो समष्टि अति s-सामान्य है। माना C तथा U क्रमशः X के ऐसे अर्ध संवृत एवं अर्ध विवृत उपसमुच्चय हैं जिससे कि $C \subset V$ तो $X - U$ अर्ध संवृत होता है और $C \cap X - U = \phi$. अतः समष्टि के अति s-सामान्य गुण के अभिगृहीत के अनुसार विसंधित अर्ध विवृत समुच्चय 0_1 तथा 0_2 विद्यमान रहते हैं जिससे कि $C_1 \subset 0_1$ तथा $X - U \subset 0_2$। माना $V = X - 0_2$ तो V अर्ध संवृत है और $C \subset 0_1 \subset V$। चूँकि $0_1 \cap 0_2 = \phi$. $\text{scl } 0_1 \subset V$ किन्तु $V \subset U$, अतः $C \subset V \subset \text{scl } V \subset U$.

विलोमतः कल्पना किया कि समष्टि से दिये प्रतिबन्ध की तुष्टि होती है। चूँकि समष्टि अर्ध T_1 है अतः हमें इतना ही सिद्ध करना है कि X अति s-प्रसामान्य है। माना F_1 तथा F_2 X के दो विसंघित अर्ध संवृत उपसमुच्चय हैं तो $F_1 \subset X - F_2 = 0$ (माना) तब 0 अर्ध विवृत है। अतः दिये प्रतिबन्ध के अनुसार एक ऐसा अर्ध विवृत समुच्चय V विद्यमान होता है कि $F_1 \subset V \subset \text{scl } V \subset 0$। माना $U = X - \text{scl } V$ तो U अर्ध विवृत है और $U \cap T = \phi$. पुनः $F_2 = X - 0 \subset X - \text{scl } V = U$ अतः समष्टि अति s-प्रसामान्य है।

निर्देश

1. बाह्‌न, ई० तथा ली जांग, **अमे० मैथ० मंथली**, 1965, **72**, 996-98.
2. सिंघल, एम० के० तथा आर्य, एस० पी०, Glasnik Mat. Ser. III, 1969, **4(24)**, 89-99.
3. लेवीन, एन०, **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70**, 36-41.
4. दास, पी०, Progress of Maths. (Benaras), 1973, **7**, 33-44.
5. माहेश्वरी, एस० एन० तथा प्रसाद, आर०, Ann. de la Soc. Sci., de Bruxelles. 1975, T. 89 III,395-420.
6. वही, Glasnik mathematicki, 1975, **10**(**30**), 347-350.
7. वही, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie, 1978, **22**(**70**), 27-29.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982 Pages, 39-40

इलाहाबाद में करनाल बंट से प्रभावित गेहूँ की प्रजातियां

डी० एन० शुक्ला, नरेन्द्र सिंह तथा एस० एन० भार्गव

वनस्पति विज्ञान विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—फरवरी 3, 1981]

सारांश

इलाहाबाद में **निवोशिया इन्डिका** द्वारा जनित करनाल बंट से गेहूँ की उगाई जाने वाली 15 प्रजातियों में से K-68, C-13 और S-227 में व्यापक प्रकोप रहा। इन जातियों में करनाल बंट से उपज में लगभग 5 से 20 प्रतिशत हानि की गणना की गई।

Abstract

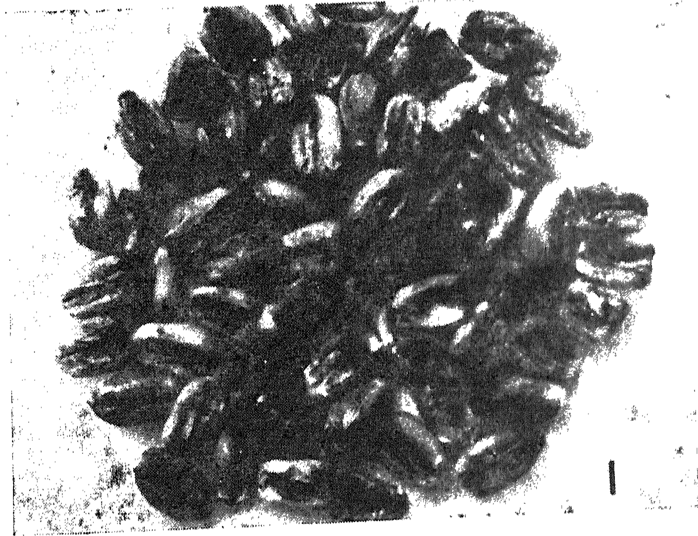
Wheat varieties affected by Karnal bunt. *By* D. N. Shukla, N. Singh and S. N. Bhargava, Department of Botany, Allahabad University.

Karnal bunt caused by *Neovossia indica* (Mitra) Mundkur, was observed on 3 out of 15 growing wheat cultivars in Allahabad viz. K 68, C 13 and S 227. Losses were estimated from 5 to 20 per cent.

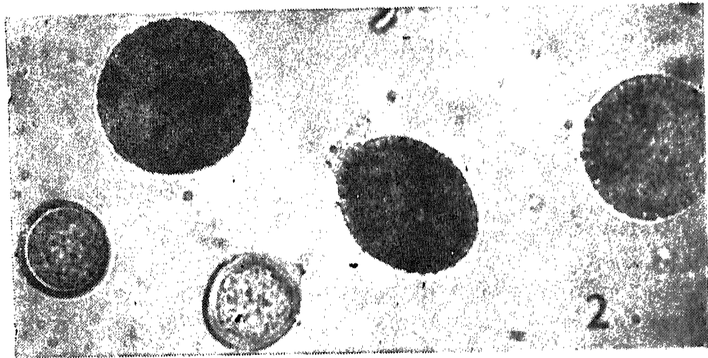
सन् 1977-80 के बीच इलाहाबाद एवं उसके निकटवर्ती क्षेत्रों में गेहूँ की फसल के रोगों का सर्वेक्षण करते समय गेहूँ की बोई गई 15 में से 3 उपजाऊ प्रजातियों में K–63, C–13 और S–227 में **निवोशिया इंडिका** जनित करनाल बंट का व्यापक प्रकोप पाया गया। इस रोग द्वारा फसल की उपज में 5 से 20 प्रतिशत तक की हानि आँकी गयी।

रोग के लक्षण तथा रोगजनक की आकारिकी मित्रा[1] एवं मुन्दकर[2] के वर्णन के अनुसार ही पाई गई।

निरीक्षण के दौरान यह देखा गया कि ज्यादातर कूँड की सभी बालें प्रभावित थीं किन्तु हर बाल के कुछ दाने ही रोगग्रस्त थे। बालों में प्रभावित दानों का प्रतिशत 10 से 80 तक था।



चित्र 1– निवोशिया इन्डिका से प्रभावित गेहूँ (K–68) के दानें



चित्र 2– निवोशिया इन्डिका के बीजाणु (X–520)

निर्देश

1. मित्रा, एम०, Ann. appl. Biol., 1931, **18**, 178-179.

2. मुन्दकर, बी० बी० Trans. Brit. mycol. Soc., 1940, **24**, 312-336.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 41-43

केरोसीन के अवशेष का गैस क्रोमेटोग्राफीय परीक्षण

ए० के० गुरू तथा एम० पी० गौतम

राजकीय विधि-विज्ञान प्रयोगशाला, सागर

[प्राप्त—मार्च 23, 1981]

सारांश

OV-17 on Chromosorb, G., जी० एल० सी० स्तम्भ का प्रयोग करके घटनास्थल से प्राप्त केरोसीन तेल तथा सम्बन्धित घटना में अधजले कपड़ों से निष्कर्षण के पश्चात् प्राप्त तेल का अवशेष का परीक्षण किया गया है। तेल की सूक्ष्म मात्रा तथा प्राप्त परिणामों की दृष्टि से विधि-विज्ञान प्रयोगशालाओं के रासायनिक परीक्षकों हेतु यह अध्ययन उपयोगी है।

Abstract

Examination of kerosene residues by gas liquid chromatography. *By* A. K. Guru and M. P. Goutam, State Forensic Science Laboratory, Sagar.

OV-17 On Chromosorb G. Column was used for the identification and comparison of kerosene oil residues in clothes (partially burnt) with standard kerosene oil. This column has been found suitable to forensic scientists.

सामान्यतः पाया गया है कि अपराधी तत्व हत्या या आत्महत्या के मामलों में केरोसीन तेल (मिट्टी का तेल) का प्रयोग करते हैं। घटना पश्चात् मृतक के शरीर पर बचे अधजले कपड़ों या घटनास्थल पर प्रभावित अन्य कपड़ों को अपराध-अनुसंधान के दौरान, विवेचना अधिकारियों द्वारा विधि-विज्ञान प्रयोगशाला में परीक्षण हेतु भेजा जाता है। साथ ही घटनास्थल में उपयोग में लाये गये तेल के पात्र, शीशी इत्यादि को भी जिसमें अल्प मात्रा में केरोसीन हो सकता है भेजते हैं। रासायनिक परीक्षक ऐसे ज्वलनशील पदार्थ की तथा अधजले कपड़ों से वाष्पीकरण विधि से निष्कर्षण करके जो द्रव प्राप्त करता है उनमें समानता हेतु परीक्षण करता है, उनके भौतिक तथा रासायनिक गुणों का विश्लेषण करता है और उनका तुलनात्मक परीक्षण कर अपनी राय प्रकट करता है। पर बहुधा पाया गया है कि इन घटनाओं में कपड़ों तथा बर्तन आदि में केरोसीन बहुत सूक्ष्ममात्रा में (0.1 या 0.2 मिलीलिटर) रह जाता है तब सामान्य परीक्षणों जैसे

फ्लेश बिंदु, श्यानता, विशिष्ट गुरुत्व, अपवर्तनांक आदि अन्य परीक्षण द्वारा जो आई० एस० आई० द्वारा प्रस्तावित हैं इनका परिचयात्मक परीक्षण सम्भव नहीं है।

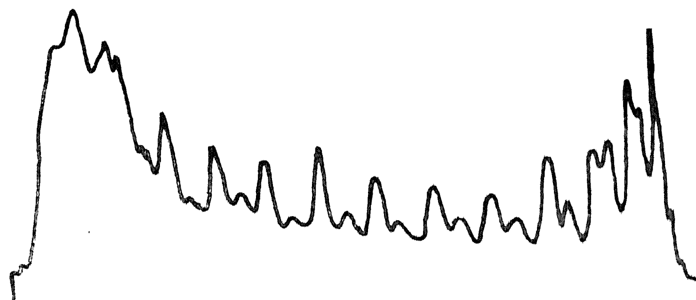
इस दशा में जी०एल०सी० क्रोमेटोग्राफी विधि बहुत उपयोगी सिद्ध हुई है। वैसे अन्य वैज्ञानिकों[1-3] ने इस विधि के बारे में अपने शोधपत्र प्रस्तुत किये हैं। प्रस्तुत लेख में एक नये स्तम्भ (कालम) का उपयोग कर इस विधि का अधिक सुलभ अध्ययन किया गया है। इस कालम के क्रोमेटोग्राम में शृंगों (peaks) का विभेदन (resolution) स्पष्ट पाया गया है (क्रोमेटोग्राम 1 एवं 2)।

प्रयोगात्मक

प्रयोगात्मक परीक्षण हेतु कपड़ों को केरोसीन में भिगोया गया तथा थोड़ी देर जलाया गया। कपड़ों के अधजले भागों को काटकर वाष्पीकरण विधि द्वारा तेल निष्कर्षण किया गया। इससे केवल 0.3 मिली० तेल की मात्रा प्राप्त हुई। इस हेतु उपयोग में लाये गये तेल तथा वाष्पीकरण विधि से प्राप्त तेल का परीक्षण जी० एल० सी० द्वारा किया गया।



क्रोमेटोग्राम – 1 : घटनास्थल के बर्तन में बचा हुआ तेल



क्रोमेटोग्राम – 2 : निष्कर्षण विधि से प्राप्त तेल

उपयोग में लाये गये गैस क्रोमोटोग्राफी यन्त्र का तथा विभिन्न परीक्षण दशाओं में उल्लेख निम्नानुसार है :

उपकरण : पर्किन एल्मर माडल F_{11} गैस क्रोमैटोग्राफ जो हाइड्रोजन फ्लेम डेटेक्टर तथा ताप प्रोग्रैमर से लैस था। स्तम्भ लम्बाई 2 मी०, व्यास 1/8'' od

$2\frac{1}{2}$% OV—17 On $97\frac{1}{2}$% Chromosorb G. से पैक किया; नमूने का आकार 0.5μ, नाइट्रोजन 30 psi प्रवेश; दाब, हाइड्रोजन 20 psi चार्ट गति 10 मिमी०/मिनट, सुग्राहिता 50×10^2,ताप 90—230°C, उष्मन की दर 10°C/मिनट

परिणाम तथा विवेचना

OV-17 on Chromosorb G. कालम के प्रयोग से दोनों प्रकार के तेल नमूनों से प्राप्त क्रोमेटोग्राम में शृंगों का विभेदन उत्तम और स्पष्ट रहा। अतः यदि तेल की मात्रा 0.1 मि०ली० से भी कम है तो उनका परीक्षण कर रासायनिक परीक्षक ऐसे नमूनों के बारे में अपना मत प्रकट कर सकता है जिन्हें फोरेंसिक परीक्षण हेतु भेजा गया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक शोधकार्य में सुविधायें प्रदान करने हेतु राजकीय विधि-विज्ञान प्रयोगशाला के संचालक डा० वी० बी० अग्निहोत्री के आभारी हैं।

निर्देश

1. नारायण स्वामी, के० तथा पई, एच० एल०, **इन्टरपोल** 1971, **251**, 216.
2. मट्टू, वी० एन० तथा पई, पी० पी०, **इन्टरपोल**, 1975, **285**, 59.
3. विल्सन, डी०, **फोरेंसिक साइंस**, 1977, **10(3)**, 235.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982 Pages, 45-48

ली-बीजावली के दृष्टिकोण से लागेर बहुपदों का अध्ययन

राजेन्द्र नाथ जैन तथा महेश दुबे
गणित विभाग, होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर

[प्राप्त—अगस्त 24, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य ब्रूरिया कॉफमन द्वारा प्रयुक्त प्रविधि का उपयोग करते हुए लागेर बहुपदों के लिए योग-प्रमेय और जनक फलन प्राप्त करना है।

Abstract

On Laguerre polynomials from the view-point of Lie Algebra. *By.* R. N. Jain and M.K. Dube, Department of Mathematics, Holkar Science College, Indore.

The object of the paper is to obtain the addition theorem and generating function for the Laguerre polynomials using Bruria Kaufman's tecniques.

1. लागेर बहुपदों को निम्न सूत्र की सहायता से परिभाषित किया जाता है—

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\ {}_1F_1(-n;\ 1+\alpha;\ x) \tag{1.1}$$

और ये बहुपद निम्नलिखित पुनरावृत्ति-सम्बन्धों को संतुष्ट करते हैं—

$$(n+\alpha)\ \Gamma_{n-1}^{(\alpha)}(x)+(n+1)\ \Gamma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(\alpha+1-x+2n)\ \Gamma_n^{(\alpha)}(x)=0 \tag{1.2}$$

$$x\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)=n\,L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

$$=-\alpha\,L_n^{(\alpha)}(x)+(n+\alpha)\,L_n^{(\alpha-1)}(x) \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha+1)}(x) \tag{1.4}$$

और

$$L_n^{(\alpha)}(x) = L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + L_n^{(\alpha-1)}(x), \tag{1.5}$$

जो यथार्थ में उन तीन लागेर बहुपदों को समाविष्ट करने वाले सूत्र हैं जिनके घातों या क्रम में एक का अन्तर है।

प्रस्तुत शोध-पत्र का उद्देश्य $\mathscr{G}$ और λ दो संकारकों की रचना करना है जो हर्माइट ग्रुप की ली-बीजावली का जनन करते हैं[1] और इनकी सहायता से लागेर बहुपदों के लिए घात और क्रम के संदर्भ में योग प्रमेय तथा जनक फलन प्राप्त करना है।

2. माना कि

$$F_{n,\alpha}(x,t) = e^t \,.\, L_n^{(\alpha)}(x) \tag{2.1}$$

तो उपर्युक्त पुनरावृत्ति सम्बन्धों की सहायता से यह स्पष्ट है कि संकारक

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{R}_1 &= \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right] \\ \mathscr{L}_1 &= \left[n\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x}\right] \\ \mathscr{R}_2 &= \left[(1+n+\alpha-x)\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\right] \\ \text{और} \quad \mathscr{L}_2 &= \left[\alpha\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

निम्न सम्बन्धों को संतुष्ट करते हैं—

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{R}_1 F_{n,\alpha}(x,t) &= F_{n,\alpha+1}(x,t) \\ \mathscr{L}_1 F_{n,\alpha}(x,t) &= (n+\alpha) F_{n-1,\alpha}(x,t) \\ \mathscr{R}_2 F_{n,\alpha}(x,t) &= (n+1) F_{n+1,\alpha}(x,t) \\ \text{और} \quad \mathscr{L}_2 F_{n,\alpha}(x,t) &= (n+\alpha) F_{n,\alpha-1}(x,t) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

माना कि

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{G} &= \mathscr{R}_1 \mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_1 \mathscr{R}_1 \\ \text{और} \quad \lambda &= \mathscr{R}_2 \mathscr{L}_2 - \mathscr{L}_2 \mathscr{R}_2 \end{aligned}\right] \tag{2.4}$$

तो हम देखते हैं कि

और

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{G}\, F_{n,\,\alpha}(x, t) &= -F_{n-1,\,\alpha+1}(x, t) \\ \lambda\, F_{n,\,\alpha}(x, t) &= -(n+1)\, F_{n+1,\,\alpha-1}(x, t) \end{aligned}\right] \qquad (2.5)$$

ये संकारक निम्न क्रम विनिमेय नियम से आबद्ध हैं—

$$[\mathscr{G}, \lambda] \equiv \chi = 1; \quad [\mathscr{G}, \chi] = [\lambda, \chi] = 0 \qquad (2.6)$$

(x और t) के समतल में हम पाते हैं कि,

$$\exp(\omega\mathscr{G}) \begin{cases} x \to x+\omega \\ t \to t \end{cases} \qquad (2.7)$$

$$\exp(p\lambda) \begin{cases} x \to x \\ t \to t+px \end{cases} \qquad (2.8)$$

3. अब हम फलन $F_{n,\,\alpha}(x, t)$ पर संकारक $\exp(\omega\mathscr{G})$ के विनियोग से लागेर बहुपदों के लिए योग-प्रमेय प्राप्त करेंगे।

$$\begin{aligned} \exp(\omega\mathscr{G})\,.\,F_{u,\,\alpha}(x, t) &= F_{n,\,\alpha}(x', t') \\ &= e^t\,.\,L_n^{(\alpha)}(x+\omega) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

और दूसरी ओर

$$\exp(\omega\mathscr{G})\, F_{n,\alpha}(x, t) = e^t\,.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^k}{K!}\, L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) \qquad (3.2)$$

अतः

$$L_n^{(\alpha)}(x+\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^k}{K!} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) \qquad (3.3)$$

जो कि अभीष्ट योग-प्रमेय है (देखें [2] और [3])।

इसी प्रकार फलन $F_{n,\,\alpha}(x, t)$ पर संकारक $\exp(p\lambda)$ के विनियोग से, एक ओर हमें प्राप्त होता है—

$$\begin{aligned} \exp(p\lambda)\, F_{n,\,\alpha}(x, t) &= F_{n,\,\alpha}(x', t') \\ &= e^t\,.\,e^{px}\,.\,L_n^{(\alpha)}(x) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

वहीं दूसरी ओर

$$\exp(p\lambda)\, F_{n,\,\alpha}(x, t) = e^t\,.\sum_{l=0}^{\infty} (-p)^l \binom{n+l}{l} L_{n+l}^{(\alpha-l)} \qquad (3.5)$$

अत:

$$e^{px} \cdot L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-p)^l \binom{n+l}{l} L_{(u+l)}^{(\alpha-l)}(x) \tag{3.6}$$

विशिष्ट स्थिति में अल-सलाम [4] के एक परिणाम के उपयोग से हमें प्राप्त होता है

$$(1+t)^{\alpha} e^{-xt} L_n^{(\alpha)}(x+xt) = e^{-xt} L_n^{(\alpha)}(x)$$

यदि बायीं ओर $\alpha = -n$ तो

$$\frac{(1+t)^{-n} (-x)^n (1+t)^n}{n!} = \frac{(-x)^n}{n!}$$

जो $\alpha = -n$ पर दायीं ओर से संपाती है [3] और (3.6) की सत्यता स्थापित करता है ।

निर्देश

1. ब्रूरिया, कॉफमन, **J. Math. Phy.** 1966, **7** (3), 447-457.
2. एर्डेल्यी, ए०, **Composite Mathematica** 1939, 7 (2), 340-352.
3. बुखोल्क, हरबर्ट The Confluent Hypergeometric Functions. Sp. Verlage. 1969.
4. अल-सलाम, डब्ल्यू० ए०, Duke Math. J. 1964, **31**(1), 127-142.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 49-58

$H(x, y)$ का द्विगुण समाकलन

सैयद असगर अली, जी० के० गोयल, तथा ए०एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 23, 1981]

सारांश

जी०के० गोयल द्वारा परिभाषित $H(x, y)$ वाले चार द्विगुण कंटूर समाकलों का मूल्यांकन किया गया है।

Abstract

Double integration of $H(x, y)$. Syed Asghar Ali, G.K. Goyal and A.N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

Four double contour integrals involving $H(x, y)$ defined by Goyal G.K. (1971) have been evaluated.

1. प्रस्तावना

गोयल द्वारा प्रदत्त $H(x, y)$ फलन को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$H^{m_1,n_1;m_2,n_2;m_3,n_3}_{p_1,q_1;p_2,q_2;p_3,q_3}\left[\begin{array}{c|c} x & [\{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, \alpha'_{p_1})\} : \{b_{q_1}; \beta_{q_1}, \beta'_{q_1})\}] \\ & \{((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) ; ((d_{q_2}, \delta_{q_2}))\} \\ y & \{((e_{p_3}, \lambda_{p_3})) ; ((f_{q_3}, \mu_{q_3}))\} \end{array}\right]$$

$$\equiv H(x, y) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1, L_2} \phi(s+t)\, \psi(s, t)\, x^s\, y^t\, ds\, dt \qquad (1.1.0)$$

जहाँ

$$\{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, \alpha'_{p_1})\} \equiv (a_1; \alpha_1, \alpha'_1), (a_2; \alpha_2, \alpha'_2), \ldots, (a_{p_1}; \alpha_{p_1}, \alpha'_{p_1})$$

$$((c_{p_2}, \gamma_{p_2}))\equiv(c_1, \gamma_1), (c_2, \gamma_2), \ldots, (c_{p_2}, \gamma_{p_2})$$

$$\phi(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+\alpha_j' t) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(b_j-\beta_j s-\beta_j' t)}{\prod_{j=1+m_1}^{p_1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-\alpha_j' t) \prod_{j=1+n_1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+\beta_j' t)} \tag{1.1.1}$$

$$\psi(s, t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(1-e_j+\lambda_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(f_j-\mu_j t)}{\prod_{j=1+m_2}^{p_2} \Gamma(c_j-\gamma_j s) \prod_{j=1+n_2}^{q_2} \Gamma(1-d_j+\delta_j s) \prod_{j=1+m_3}^{p_3} \Gamma(e_j-\lambda_j t) \prod_{j=1+n_3}^{q_3} \Gamma(1-f_j+\mu_j t)} \tag{1.1.2}$$

p_k, q_k, m_k, n_k ($k=1, 2, 3$) ऐसी अनृण संख्यायें हैं जिससे कि $0\leqslant m_k\leqslant p_k$; $0\leqslant n_k\leqslant q_k$; समस्त a, b, c, d, e, f सम्मिश्र संख्यायें हैं जहाँ कि समस्त $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं और

$$\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+\alpha'_j t),\ \Gamma(1-c_j+\gamma_j s) \text{ तथा } \Gamma(1-e_j+\lambda_j t)$$

का कोई भी पोल क्रमशः

$$\Gamma(b_j-\beta_j s-\beta_j' t),\ \Gamma(d_j-\delta_j s)\ \Gamma(f_j-\mu_j t)$$

के लिए भी पोल से संपात नहीं करता। L_1, L_2 उपयुक्त कंटूर हैं जो आवश्यकता पड़ने पर अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण हैं तथा $x, y\neq0$ और

$$x^s=\exp\{s(\log|x|+i \arg(x)\}$$

$$y^t=\exp\{t(\log|y|+i \arg(y)\}$$

जिसमें $\log|x|$ तथा $\log|y|$ से $|x|$ तथा $|y|$ के प्राकृतिक लागेरिथ्म सूचित होते हैं।

(1.10) के दक्षिण पक्ष का समाकल निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी है :

$$\text{(i)}\quad \epsilon_1=\Big[\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_j-\sum_{j=1+m_1}^{p_1}\alpha_j+\sum_{j=1}^{n_1}\beta_j-\sum_{j=1+n_1}^{q_1}\beta_j+\sum_{j=1}^{m_2}\gamma_j-\sum_{j=1+m_2}^{p_2}\gamma_j$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\delta_j-\sum_{j=1+n_2}^{q_2}\delta_j\Big]>0 \tag{1.1.3}$$

(ii) $\epsilon_2=\Big[\sum_{j=1}^{m_1} \alpha'_j - \sum_{j=1+m_1}^{p_1} \alpha'_j + \sum_{j=1}^{n_1} \beta'_j - \sum_{j=1+n_1}^{q_1} \beta'_j + \sum_{j=2}^{m_3} \lambda_j - \sum_{j=1+m_3}^{p_3} \lambda_j$

$$+\sum_{j=1}^{n_3} \mu_j - \sum_{j=1+n_3}^{q_3} \mu_j \Big]>0 \qquad (1.1.4)$$

(iii) $$\epsilon_3=\Big[\sum_{j=1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j - \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{p_2} \gamma_j\Big]>0 \qquad (1.1.5)$$

(iv) $$\epsilon_4=\Big[\sum_{j=1}^{q_1} \beta'_j + \sum_{j=1}^{q_3} \mu_j - \sum_{j=1}^{p_1} \alpha'_j - \sum_{j=1}^{p_3} \lambda_j\Big]>0 \qquad (1.1.6)$$

(v) $|\arg(x)|<\frac{1}{2}\epsilon_1 \pi;\ |\arg(y)|<\frac{1}{2}\epsilon_2 \pi$ (1.1.7)

पुनश्च, यदि प्राचल दिये हुए हों तो (1.1.0) के वाम पक्ष को

$$H^{m_1,n_1;\,(\ );\,(\ )}_{p_1,q_1;\,(\ );\,(\ )}\left[\begin{array}{c|l} x & [\{a_{p_1};\alpha_{p_1},\alpha'_{p_1})\}:\{(b_{q_1};\beta_{q_1},\beta'_{q_1})\}] \\ & \{((\quad));((\quad))\} \\ y & \{((\quad));((\quad))\} \end{array}\right]$$

द्वारा प्रदर्शित किया जायेगा ।

2. समाकल

निम्नलिखित चार समाकल सिद्ध किये जायेंगे ।

प्रथम समाकल

यदि प्रतिबन्धों के निम्नलिखित समुच्चय की तुष्टि हो

(i) $|\arg z_1|<\frac{1}{2}\epsilon_1 \pi;\ |\arg z_2|<\frac{1}{2}\epsilon_2 \pi;$

एपसाइलनों तथा उनके प्रतिबन्धों को (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6) में दिया गया है ।

(ii) L_3, L_4 उपयुक्त कंटूर हों

(iii) b, c काल्पनिक हैं

(iv) $R(f-g-a-b-c-d)>0,\ R(a+b)>0$

$$R\left(g+b+c+h\frac{d_j}{\delta_j}+h'\frac{f_k}{\mu_k}\right)>0 \quad \text{क्योंकि } j=1, 2, \ldots, n_2$$

$$k=1, 2, \ldots, n_3$$

$$R\left(g+b+c+h\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0 \qquad \text{क्योंकि } j=1, 2, \ldots, n_1$$

तो

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_3, L_4}\frac{\Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)}{[\Gamma(c-y)\,\Gamma(d+y)]^{-1}}\,e^{\mp i\pi(x+y)}$$

$$\cdot H^{m_1+1,n_1;\,(\,);\,(\,)}_{p_1+1,q+1;\,(\,);\,(\,)}\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-g-x-y;\, h, h'), \{(a_{p_1};\, \alpha_{p_1}, \alpha'_{p_1})\}: \\ & \{(b_{q_1};\, \beta_{q_1}, \beta'_{q_1})\}, (1-f-x-y;\, h, h')\} \\ z_2 & \{((\quad)); ((\quad))\}; \{((\quad)); ((\quad))\} \end{array}\right]\cdot dx\, dy$$

$$= e^{\mp i\pi(b+c)}\,\frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(f-g-a-b-c-d)\,\Gamma(d+c)}{\Gamma(f-g)}$$

$$\cdot H^{m_1+1,n_1;\,(\,);\,(\,)}_{p_1+1,q_1+1;\,(\,);\,(\,)}\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-g-b-c;\, h, h'), \{(a_{p_1};\, \alpha_{p_1}, \alpha'_{p_1})\}: \\ & \{(b_{q_1};\, \beta_{q_1}, \beta'_{q_1})\}, (1-f+a+d;\, h, h') \\ z_2 & \{((\quad)); ((\quad))\}; \{((\quad)); ((\quad))\} \end{array}\right] \tag{2.1.1}$$

(2.1.1) की उपपत्ति

(2.1.1) को सिद्ध करने के लिए (1.1.0) में दिये गये मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकलों के वाम पक्ष में $H(x, y)$ का मान रखते हैं, समाकलन का क्रम बदलते हैं जो दिये हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है और एर्डेल्यी[4] [4, p. 232] की सहायता से आन्तरिक समाकलन का मान $b-x=-\xi$ तथा $c-y=-\eta$ रख कर ज्ञात करते हैं। इससे (2.1.1) का वाम पक्ष से निम्न फल प्राप्त होता है

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1, L_2}\phi(s+t)\,\psi(s, t)\,z_1^s\,z_2^t\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}$$

$$\cdot F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma : 1, 1)\,e^{\mp i\pi(b+c)}ds\, dt$$

जहाँ

$$\alpha=g+b+c+hs+h'\,t;\ \beta=a+b;\ \beta'=d+c;\ \gamma=f+b+c+hs+h'\,t$$

अब

$$F_1(\alpha, \beta; \beta', \gamma; 1, 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\gamma-\alpha-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\ \Gamma(\gamma-\beta-\beta')}$$

[एर्डेल्यी 2, p. 239] का प्रयोग करने और पुनः (1.1.0) की सहायता से विवेचना करने पर (2.1.1) का दक्षिण पक्ष तुरन्त निकल आता है।

द्वितीय समाकल

यदि निम्नलिखित प्रतिबन्ध समुच्चय की तुष्टि हो

(i) समाकल I के प्रतिबन्ध (i), (ii), (iii) ऊपर दिये गये हैं

(ii) $R(f-a-d)>0,\ R(a+b)>0,$

$$R\left(f-a-b-c-d-g-h\,\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)>0 \text{ क्योंकि } j=1, 2, \ldots, m_1$$

$$R\left\{f-a-b-c-d-g+h\left(\frac{1-c_j}{\gamma_j}\right)+h'\left(\frac{1-e_k}{\lambda_k}\right)\right\}>0$$

क्योंकि

$$j=1, 2, \ldots, m_2;\ k=1, 2, \ldots, m_3$$

$$R\left(g+b+c+h\,\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0 \text{ क्योंकि } j=1, 2, \ldots, n_1$$

$$R\left(g+b+c+h\,\frac{d_j}{\delta_j}+h'\,\frac{f_k}{\mu_k}\right)>0 \text{ क्योंकि } j=1, 2, \ldots, n_2$$

$$k=1, 2, \ldots, n_3$$

तो

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_3,\,L_4} \Gamma(b-x)\ \Gamma(c-y)\ \Gamma(a+x)e^{\mp i\pi(x+y)}$$

$$.H^{m_1+2,n_1;\,(\,);\,(\,)\,:}_{p_1+2,q_1+2;\,(\,);\,(\,)\,:}\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-d-y;\,h,\,h'),\ (1-g-x-y;\,h,\,h'), \\ & \{(a_{p_1};\,\alpha_{p_1},\,\alpha'_{p_1})\};\ \{(b_q,\,\beta_q,\,\beta'_{q_1})\}, \\ z_2 & (1-f-x-y;\,h,\,h'),\ (1-c-d;\,h,\,h')] \\ & \{((\quad));\,((\quad))\};\ \{((\quad));\,((\quad))\} \end{array}\right].dx\,dy$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(f-g)\,\Gamma(f-a-d)}\,e^{\mp i\pi(b+c)}$$

$$.H^{m_1+1,n_1+1;\,(\,),\,(\,)\,:}_{p_1+1,q_1+1;\,(\,);\,(\,)\,:}\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-g-b-c;\,h,\,h'),\,\{(a_{p_1};\,\alpha_{p_1},\,\alpha'_{p_1})\}\,: \\ & (f-a-b-c-d-g;\,h,\,h'), \\ z_2 & \{(b_{q_1};\beta_{q_1},\beta'_{q_1})\}] \\ & \{((\quad));((\quad))\};\{((\quad));((\quad))\} \end{array}\right] \qquad (2.1.2)$$

उपपत्ति

इसकी उपपत्ति (2.1.1) की भाँति है।

तृतीय समाकल

यदि निम्नलिखित प्रतिबन्ध-समुच्चय की तुष्टि हो

(i) समाकल I के प्रतिबन्ध (i), (ii), (iii) ऊपर दिये हुए हैं

(ii) $R(d-f-g)>0,\ R\left(d-a-b-c-g-f-h\,.\,\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)>0$

क्योंकि $j=1, 2, \ldots, m_1$

$R\left(a+b+c+h\,.\,\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$ क्योंकि $j=1, 2, \ldots, n_1$

$R\left(g+b+h\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0$ क्योंकि $j=1, 2, \ldots, n_2$

$R\left(a+b+c+h\,\frac{d_j}{\delta_j}+h'\,\frac{f_k}{\mu_k}\right)>0$ क्योंकि $j=1, 2, \ldots, n_2$

$k=1, 2, \ldots, n,$

$R\left(d-a-b-c-f-g+h\,\frac{1-c_j}{\gamma_j}+h'\,\frac{1-e_k}{\lambda_k}\right)>0$

क्योंकि $j=1, 2, \ldots, m_2;\ k=1, 2, \ldots, m_3$

$R\left(d-a-f-c+h'\,.\frac{1-e_k}{\lambda_k}\right)>0$ क्योंकि $k=1, 2, \ldots, m_3$

तो

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_3,L_4} \Gamma(b-x)\,\Gamma(c-y)\,e^{\mp i\pi(x+y)}$$

$$.H^{m_1+1,n_1;m_2+1,n_2;m_3+1,n_3}_{p_1+1,q_1+1;p_2+1,q_2;p_3+1,q_3+1}\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-a-x-y;\,h,h'),\,\{(a_{p_1};\,\alpha_{p_1}\,\alpha'_{p_1})\}: \\ & \{b_{q_1};\,\beta_{q_1},\,\beta'_{q_1})\},\,(1-d-x-y;\,h,\,h')] \\ z_2 & \{(1-g-x,\,h),\,((c_{p_2},\,\gamma_{p_2})):((\;\;))\} \\ & \{(1-f-y,\,h),\,((e_{p_3},\,\lambda_{p_3})): \\ & ((f_{q_3},\,\mu_{q_3}))\,(1-f-c,\,h)\} \end{array}\right].\,dx\,dy$$

$$=\frac{e^{\mp i\pi(b+c)}}{\Gamma(d-a)\,\Gamma(d-g-f)}\,H^{m_1+1,n_1+1;m_2+1,n_2;\,(\;):}_{p_1+1,q_1+1;p_2+1,q_2;\,(\;):}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-a-b-c;\,h,\,h'),\,\{(a_{p_1};\,\alpha_{p_1},\,\alpha'_{q_1})\}: \\ z_2 & (d-a-b-c-g-f;\,h,\,h'),\,\{(b_{q_1};\,\beta_{q_1},\,\beta'_{q_1})\}] \\ & \{(1-g-b,\,h),\,((c_{p_2},\,\gamma_{p_2}));((\;\;))\}:\{(\;\;));((\;\;))\} \end{array}\right] \qquad (2.1.3)$$

उपपत्ति

(2.1.1) की भाँति।

चतुर्थ समाकल

यदि प्रतिबन्धों का निम्नलिखित समुच्चय तुष्ट हो

(i) समाकल I के प्रतिबन्ध (i), (ii), (iii) ऊपर दिये हैं

(ii) $R(d-a-b-c-f-g)>0$, $R\left(a+b+c+h\,\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$

क्योंकि $j=1, 2, \ldots, n_1$

$R\left(g+b+h\,\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0$ क्योंकि $j=1, 2, \ldots, n_2$

तो

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_3,L_4} \Gamma(b-x)\,\Gamma(c-y)\, e^{\mp i\pi(x+y)}$$

$$.H^{m_1+1,n_1;m_2+2,n_2+1;\,(\,)\,:}_{p_1+1,q_1+1;p_2+2,q_2+1;\,(\,)\,:}\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-a-x-y;\,h,\,h'),\,\{(a_{p_1};\,\alpha_{p_1},\,\alpha'_{p_1})\} \\ & \{(b_{q_1};\,\beta_{q_1},\,\beta'_{q_1})\},\,(1-d-x-y;\,h,\,h')] \\ z_2 & \{(1-g-x,\,h),\,((c_{p_2},\,\gamma_{p_2}))\,(f+c,\,h); \\ & (f+y,\,h),\,((d_{q_2},\,\delta_{q_2}))\}\,\{((\;));\,((\;))\} \end{array}\right].dx\,dy$$

$$=\frac{\Gamma(d-a-b-c-g-f)}{\Gamma(d-a)}\, e^{\mp i\pi(b+c)}$$

$$.H^{m_1+1,n_1;m_2+1,n_2;\,(\,)\,:}_{p_1+1,q_1+1;p_2+1,q_2+1;\,(\,)\,:}\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(1-a-b-c;\,h,\,h'),\,\{(a_{p_1};\,\alpha_{p_1},\,\alpha'_{p_1})\} \\ & \{(b_{q_1};\,\beta_{q_1},\,\beta'_{q_1})\}\,(1-d+g+f;\,h,\,h')] \\ z_2 & \{(1-g-b,\,h),\,((c_{p_2},\,\gamma_{p_2}));\,((d_{q_2},\,\delta_{q_2}))\} \\ & \{((\;));\,((\;))\} \end{array}\right] \tag{2.1.4}$$

उपपत्ति

(2.1.1) की भाँति ।

सम्प्रयोग

नवीन एवं रोचक विशिष्ट दशाओं को प्राप्त करने के लिए निम्नांकित योजना बनाई गई ।

(i) यदि $n_1=0$, तो हमें $A^*(x, y)$ फलन वाला समाकल प्राप्त होता है जिसे चतुर्वेदी तथा गोयल[2] ने परिभाषित किया है । (देखें चतुर्वेदी[3] भी) ।

(ii) यदि उपर्युक्त ($n_1=0$) के अतिरिक्त भी हम $h=1$,

$$\alpha_{p_1}=\beta_{q_1}=\alpha'_{q_1}=\beta'_{q_1}=\gamma_{p_2}=\delta_{q_2}=\lambda_{p_3}=\mu_{q_3}=1$$

लें तो हमें शर्मा द्वारा परिभाषित[7] $S(x, y)$ वाला समाकल प्राप्त होगा ।

(iii) यदि $n_1=0, h=1, \alpha_{p_1}=\beta_{q_1}=\alpha'_{p_1}=\beta'_{q_1}=\gamma_{p_2}=\delta_{q_2}$
$=\lambda_{p_3}=\mu_{q_3}=1$ तथा $p_2=q_2, p_3=q_3$

तो हमें अग्रवाल[1] द्वारा परिभाषित $G(x, y)$ वाला समाकल प्राप्त होता है ।

(iv) $H(z_1, z_2)$ के गुण का उपयोग करने पर अर्थात्

$$\underset{z_2\to 0}{\mathrm{Lt}}\ H^{m_1,0;m_2,n_2;m_3,n_3}_{p_1,q_1;p_2,q_2;p_3,q_3}\left[\begin{array}{c|c} z_1 & [(a_{p_1};\alpha_{p_1},1):(b_{q_1};\beta_{q_1};1)] \\ & \{((c_{p_2},\gamma_{p_2})):((d_{q_2},\delta_{q_2}))\} \\ z_2 & \{((e_{p_3},1)):(0,1),(f_2,1) \\ & \ldots(f_q,1)\} \end{array}\right]$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{p_3}\Gamma(1-e_j)}{\prod_{j=2}^{q_3}\Gamma(1-f_j)}\,H^{n_2,m_1+m_2}_{p_1+p_2,q_1+q_2}\left[z_1\left|\begin{array}{c}\{((a_{p_1},\alpha_{p_1})):((c_{p_2},\gamma_{p_2}))\}\\ \{((d_{q_2},\delta_{q_2})):((b_{q_1},\beta_{q_1}))\}\end{array}\right.\right]$$

$H(z_1)$ में घातांक तथा परसर्ग फाक्स[5] द्वारा दिये पारम्परिक हैं । हमें प्राप्त होता है

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_3,L_4}\frac{\Gamma(a+x)\,\Gamma(b-x)}{[\Gamma(c-y)\,\Gamma(d+y)]^{-1}}\,e^{\mp i\pi(x+y)}$$

$$.\,H^{n_2,m_1+m_2}_{p_1+p_2+1,q_1+q_2+1}\left[z_1\left|\begin{array}{c}(1-g-x-y,h),\{(a_{p_1},\alpha_{p_1})\},\{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2},\delta_{q_2})\},\{(b_{q_1},\beta_{q_1})\},(1-f-x-y,h)\end{array}\right.\right]dx\,dy$$

$$=e^{\mp i\pi(b+c)}\frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(f-g-a-b-c-d)\,\Gamma(d+c)}{\Gamma(f-g)}$$

$$.\,H^{n_2,m_1+m_2}_{p_1+p_2+1,q_1+q_2+1}\left[z_1\left|\begin{array}{c}(1-g-b-c,1),\{(a_{p_1},\alpha_{p_1})\},\{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2},\delta_{q_2})\},\{(b_{q_1},\beta_{q_1})\},(1-f+a+d,1)\end{array}\right.\right]$$

(v) यदि ऊपर दिये (iv) में हम

$$\alpha_{p_1}=\gamma_{p_2}=\delta_{q_2}=\beta_{q_1}=1$$

रखें तो हमें माइजर के G-फलन में समाकल प्राप्त होता है यदि हम गुण

$$.\,H^{1,u}_{p,q}\left[x\left|\begin{array}{c}((a_p,1))\\((b_q,1))\end{array}\right.\right]=G^{1,u}_{p,q}\left[x\left|\begin{array}{c}((a_p))\\((b_q))\end{array}\right.\right]$$

का सम्प्रयोग करें ।

यदि हम एर्डेल्यी[4] के द्वारा दिए हुए सम्बन्धों का सम्प्रयोग करें तो विविध विशिष्ट फलनों वाले अनेक ज्ञात तथा नवीन समाकल प्राप्त होंगे ।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर०पी०, **प्रोसी०नेश०इंस्टीच्यूट साइंस इण्डिया**, 1965, **30**, 536-546
2. चतुर्वेदी, के०के० तथा गोयल, ए०एन०, **इंण्डियन जर्नं० प्योर एप्लाइड मैथ०**, 1972, **3**, 356-360 (देखें चतुर्वेदी, **पी-एच० डी० थीसिस**, राजस्थान विश्वविद्यालय 1969)
3. चतुर्वेदी, के० के०, **पी-एच० डी० थीसिस**, राजस्थान विश्वविद्यालय, 1969
4. एर्डेल्यी, ए०, : H.T.F., 1953, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क
5. फाक्स, सी०, **ट्रांजे०अमे०मैथ०सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
6. गोयल, जी०के०, Raj. Univ. Stu. Maths., 1971, I, 37-46
7. शर्मा, बी०एल०, Annal. Soc. Sci. Brux., T. 1965, **79**, 26-40

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1981, Pages 59-66

एक तथा दो चरों के H-फलनों से युक्त समाकल

नवरत्न राठी
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त — अगस्त 21, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक तथा दो चरों वाले H-फलन से युक्त कतिपय समाकलों का मूल्यांकन किया गया है। प्राप्त परिणाम अत्यन्त व्यापक हैं और इनमें से कई विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं। कुछ रोचक विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

Integral involving H-functions of one and two variables. *By* Navratna Rathie, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

In this paper we evaluate some integrals involving H-function of one and two variables. The results are quite general and include many known results as particular cases. Some interesting particular cases have also been given.

1. भूमिका

यदि

$$\phi(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,\ Re(p)>0,$$

तो $\phi(p)$ को $f(t)$ का लाप्लास परिवर्त कहते हैं और इस सम्बन्ध को सामान्यतया

$$f(t) \doteqdot \phi(p) \quad \text{या} \quad \phi(p) \doteqdot f(t).$$

द्वारा सूचित किया जाता है। पार्सेवाल गोल्डस्टाइन प्रमेय इस प्रकार है :

$$\text{यदि}\ \phi_1(p) \doteqdot f_1(t)\ \text{तथा}\ \phi_2(p) \doteqdot f_2(t),$$

तो

$$\int_0^\infty \phi_1(x) f_2)x)\, dx = \int_0^\infty \phi_2(x) f_1(x)\, dx, \tag{1.1}$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हो।

मित्तल तथा गुप्ता[5] ने दो चरों वाले H-फलन को द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल के पदों में निम्नवत् परिभाषित एवं प्रदर्शित किया है :

$$H[x, y] = H^{0,n_1:m_2,n_2:m_3,n_3}_{p_1,q_1:p_2,q_2:p_3,q_3}\left[\begin{array}{c|c} x & (a_j:\alpha_j,A_j)_{1p_1}:(c_j,\gamma_j)_{1,p_2}:(e_j,E_j)_{1,p_3} \\ y & (b_j:\beta_j,B_j)_{1,q_1}:(d_j,\delta_j)_{1q_2}:(f_j,F_j)_{1,q_3} \end{array}\right]$$

$$= (2\pi i)^{-2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s,t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s y^t\, ds\, dt \tag{1.2}$$

जहाँ

$$\phi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t)},$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+\delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-\gamma_j s)},$$

$$\theta_2(t) = \frac{\prod_{j-1}^{m_3} \Gamma(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j t+F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-E_j t)},$$

पुनः, (1.2) में x, तथा y शून्य के तुल्य नहीं हैं और रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है।

फलन $H[x, y]$ एक वैश्लेषिक फलन का प्रतिनिधित्व करे, इसके लिए प्रतिबन्ध तथा (1.2) में समाकलन के अभिसारी होने के प्रतिबन्धों की पूर्ण विवेचना मित्तल तथा गुप्ता[5] ने अपने शोधपत्र में प्रतिबन्ध (I) से (VI) के रूप में की है।

इस समूचे प्रपत्र में यह कल्पना की गई है इन प्रतिबन्धों के संगत प्रतिबन्ध सदैव ही दो चरों वाले H-फलन द्वारा तुष्ट हो लेते हैं फलतः प्राप्त परिणामों के साथ इनका उल्लेख नहीं किया जावेगा।

हम निम्नलिखित संकेतन

$$H^{0,n_1:\ldots:\ldots}_{p_1,q_1:\ldots:\ldots}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a_j;\, \alpha_j,\, A_j)_{1,\,p_1} : \ldots\,;\, \ldots \\ (b_j;\, \beta_j,\, B_j)_{1,\,q_1} : \ldots\,;\, \ldots \end{matrix}\right]$$

का उपयोग यह बताने के लिए करेंगे कि ... द्वारा प्रदर्शित प्राचल वे ही हैं जो (1.2) द्वारा परिभाषित $H[x, y]$ के हैं।

प्रस्तुत शोधपत्र में आये हुए एक चर वाले बहुविख्यात फाक्स के H-फलन को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है।

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z \middle| \begin{matrix} (a_j,\, \alpha_j)_{1,\,p} \\ (a_j,\, \beta_j)_{2,\,q} \end{matrix}\right]$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}\, z^s ds \tag{1.3}$$

इस H-फलन के प्राचलों द्वारा तुष्ट प्रतिबन्ध, इसका उपगामी प्रसार तथा अभिसरण के प्रतिबन्धों की विवेचना ब्राक्समा[1] द्वारा दी गई है।

निम्नलिखित समानयन सूत्रों की आवश्यकता पड़ेगी :

(a). $$H^{0,1:1,0;m,n}_{1,0:0,1;p,q}\left[\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (1-\gamma;\, 1,\, k : - \;;\, (e_j,\, E_j)_{1,p} \\ - \quad : (0,\, 1);\, (f_j,\, F_j)_{1,\,q} \end{matrix}\right]$$

$$=(1+x)^{-\gamma}\, H^{m,n+1}_{p+1,q}\left[y(1+x)^{-k} \middle| \begin{matrix} (1-\gamma,\, k),\, (e_j,\, E_j)_{1,\,p} \\ (f_j,\, F_j)_{1,\,q} \end{matrix}\right] \tag{1.4}$$

(b). $$H^{0,1:m,n;1,0}_{1,0:p,q;1,2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a;\, \rho,\, 1) : (c_j,\, \gamma_j)_{1,p};\, (h,\, 1) \\ - \quad : (d_j,\, \delta_j)_{1,\,q};\, (k,\, 1),\, (h,\, 1) \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{y^f(1-y)^{a-f-1}}{\Gamma(h-f)\,\Gamma(1+f-h)}\, H^{m,n+1}_{p+1,q}\left[\frac{x}{(1-y)^{\rho}}\middle| \begin{matrix} (a-f,\, \rho),\, (c_j,\, \gamma_j)_{1,\,p} \\ (d_j,\, \delta_j)_{1,q} \end{matrix}\right] \tag{1.5}$$

बशर्ते कि $|y|<1$.

2. प्रमुख समाकल

(i). प्रथम समाकल :

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(a+bx)^{-\mu}\, H^{0,n_1+1:\,\cdots\,;\,\cdots}_{p_1+1,q_1:\,\cdots\,;\,\cdots}\left[\begin{matrix} Ax^u/(a+bx)^v \\ Bx^w/(a+bx)^\delta \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} (1-\mu;\, v,\, \delta),\, (a_j;\, \alpha_j,\, A_j)_{1,\,p_1} : \cdots;\cdots \\ (b_j;\, \beta_j,\, B_j)_{1,\,q_1} : \cdots;\cdots \end{matrix}\right] dx$$

$$= b^{-\lambda}\, a^{\lambda-\mu}\, H^{0,n_1+2\,:\,\cdots;\,\cdots}_{p_1+2,q_1:\,\cdots;\,\cdots}\left[\begin{matrix} Ab^{-u}/a^{v-u} \\ Bb^{-w}/a^{\delta-w} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} (1-\lambda;\, u,\, w),\, (1+\lambda-\mu;\, v-u,\, \delta-w),\, (a_j;\, \alpha_j,\, A_j)_{1,\,p_1} : \cdots;\cdots \\ (b_j;\, \beta_j,\, B_j)_{1,\,q_1} : \cdots;\cdots \end{matrix}\right] \quad (2.1)$$

बशर्ते कि $0<u<v,\ 0<w<\delta,\ Re(\lambda+ud_i/\delta_i+wf_j/F_j)>0,$

$Re(\mu-\lambda+(v-u)\, d_i/\delta_i+(\delta-w)\, f_j/F_j)>0,\ (i=1,\, \ldots,\, m_2;\, j=1,\, \ldots,\, m_3).$

(ii) द्वितीय समाकल

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(a+bx)^{-\mu}\, H^{m,n}_{l,q}\left[hx^{-\sigma}\left|\begin{matrix}(a_j,\, \alpha_j)_{1,\,l}\\(b_j,\, \beta_j)_{1,\,q}\end{matrix}\right.\right] H^{u,v+1}_{r+1,s}\left[k(a+x)^{-\rho}\left|\begin{matrix}(1+\mu,\, \rho),\, (c_j,\, \gamma_j)\\(d_j,\, \delta_j)_{1,\,s}\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$= a^{\lambda-\mu}\, H^{0,1:m+1,n;u,v}_{1,0:l,q+1;r,s}\left[\begin{matrix}ha^{-\sigma}\\ka^{-\rho}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}(1+\lambda-\mu;\, \sigma.\, \rho) : (a_j,\, \alpha_j)_{1,\,l} \quad ;\, (c_j,\, \gamma_j)_{1,\,r}\\ \text{—} \quad : (\lambda,\, \sigma),\, (q_j,\, \beta_j)_{1,\,q};\, (d_j,\, \delta_j)_{1,\,s}\end{matrix}\right] \quad (2.2)$$

बशर्ते कि $Re(a)>0,\ \sigma>0,\ \rho>0,\quad Re(\lambda-\sigma(a_j-1)/\alpha_{ij})>0,\quad (j=1,\, \ldots,\, n),$

$Re(\mu-\lambda+\sigma b_i/\beta_i+\rho d_j/\delta_j)>0,\quad (i=1,\, \ldots,\, m;\, j=1,\, \ldots,\, u).$

उपपत्तियाँ

(2.1) को सिद्ध करने के लिए दो चरों वाले H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल

में अभिव्यक्त करते हैं और समाकलन के क्रम को उलट देते हैं (जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है) जिससे हमें निम्न फल प्राप्त होता है :

$$(2\pi i)^{-2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(s,\,t)\;\theta_1(s)\;\theta_2(t)\;\Gamma(\mu+vs+\delta t)\;A^sB^t$$

$$\times\left\{\int_0^\infty x^{\lambda+us+wt-1}\,(a+bx)^{-(\mu+vs+\delta t)}dx\;\right\}ds\;dt \tag{2.3}$$

अब बीटा फलन सूत्र[2] की सहायता से आन्तरिक x-समाकल का मान निकालने, फिर (1.2) की सहायता लेने पर अन्त में हमें वांछित फल (2.1) की प्राप्ति होती है।

परिणाम (2.2) को सिद्ध करने के लिए हम (1.1) में निम्नलिखित ज्ञात सम्बन्धों का प्रयोग करते हैं

$$f_1(t)=e^{-at}\,t^{\mu-1}\,H_{r,s}^{u,v}\left[kt^\rho\,\middle|\,\begin{matrix}(c_j,\,\gamma_j)_{1,\,r}\\(d_j,\,\delta_j)_{1,\,s}\end{matrix}\right]$$

$$\doteqdot(p+a)^{-\mu}\,H_{r+1,s}^{u,v+1}\left[k(p+a)^{-\rho}\,\middle|\,\begin{matrix}(1+\mu,\,\rho),\,(c_j,\,\gamma_j)_{1,r}\\(d_j,\,\delta_j)_{1,\,s}\end{matrix}\right]$$

$$=\phi_1(p),$$

$Re(p)>0,\ \rho>0,\ Re(\mu+\rho\,d_i/\delta_i)>0,\ (i=1,\,\ldots,\,u.).$

तथा

$$f_2(t)=t^{\lambda-1}\,H_{l,q}^{m,n}\left[ht^{-\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,l}\\(b_j,\,\beta_j)_{1,\,q}\end{matrix}\right]$$

$$\doteqdot p^{-\lambda}\;H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[hp^\sigma\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\,\alpha_j)_{1,\,l}\\(\lambda,\,\sigma),\,(b_j,\,\beta_j)_{1,\,q}\end{matrix}\right]$$

$$=\phi_2(p),$$

$Re(p)>0,\ \sigma>0,\ Re(\lambda-\sigma(a_j-1)/\alpha_j)>0,\ (j=1,\,\ldots,\,n).$

तथा ज्ञात फल[5] की सहायता से दक्षिण पक्ष के समाकलन का मान निकालते हैं।

3. विशिष्ट दशायें

(i) यदि (2.1) में $u=w=0$ रखें तो दो चरों वाले H-फलन के लिए हमें निम्नलिखित समाकल निरूपण प्राप्त होता है :

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(a+bx)^{-\mu} H^{0,n_1+1:\cdots;\cdots}_{p_1+1q,1:\cdots;\cdots} \left[\begin{matrix} A(a+bx)^{-v} \\ B(a+bx)^{-\delta} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (1-\mu;\ v\ \delta),\ (a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ p_1} : \ldots; \ldots \\ (b_j;\ \beta_j,\ B_j)_{1,\ q_1} : \ldots; \ldots \end{matrix}\right]$$

$$=\Gamma(\lambda)\ b^{-\lambda}a^{\lambda-\mu}\ H^{0,n_1+1:\cdots;\cdots}_{p_1+1,q_1:\cdots;\cdots} \left[\begin{matrix} Aa^{-v} \\ Ba^{-\delta} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (1+\lambda-\mu;\ v,\ \delta),\ (a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ p_1} : \ldots; \ldots \\ (b_j;\ \beta_j,\ B_j)_{1,q_1} : \ldots; \ldots \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

बशर्ते कि $Re(\lambda)>0,\ v>0,\ \delta>0,\ \mathrm{Re}(\lambda-\mu+v\,d_i/\delta+\delta f_j/F_j)>0, (i=1, \ldots, m_2;\ j=1, \ldots, m_3)$.

(ii) यदि (2.1) में $n_1=p_1=q_1=0,\ m_2=q_2=1,\ n_2=p_2=0,\ v=1,\ d_1=0,\ \delta_1=1$ रखें और (1.4) का उपयोग करें तो हमें निम्नलिखित रोचक समाकल प्राप्त होगा :

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(a+bx+Ax^u)^{-\mu} H^{m_3,n_3+1}_{p_3+1,q_3} \left[\frac{Bx^\omega}{(a+bx+Ax^u)^\delta}\middle| \begin{matrix} (1-\mu,\ \delta),\ (e_j,\ E_j)_{1,\ p_3} \\ (f_j,\ F_j)_{1,\ q_3} \end{matrix}\right] dx$$

$$=b^{-\lambda}\ a^{\lambda-\mu}\ H^{0,2:1,0;m_3,n_3}_{2,0:0,1;p_3,q_3} \left[\begin{matrix} A\ b^{-u}/a^{1-u} \\ B\ b^{-w}/a^{\delta-w} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (1-\lambda;\ u,\ w),\ (1+\lambda-\mu;\ 1-u,\ \delta-w) : \ —\ ; (e_j,\ E_j)_{1,p_3} \\ — \qquad : (0,\ 1);\ (f_j,\ F_j)_{1,\ q_3} \end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

जहाँ

$$1>u>0,\ 0<w<\delta,\ Re(\lambda+w\,f_1/F_1)>0,\ (i=1,\ \ldots,\ m_3),$$

$$Re(u\mu-\lambda+(u\delta-w)\,f_j/F_j)>0,\ (j=1.\ \ldots,\ m_3).$$

विशेषत: यदि (3.2) में $w\rightarrow 0$ रखें तो श्रेणी के रूप में हमें इसके पहले नायर तथा समर[7] द्वारा प्राप्त फल की उपलब्धि होती है ।

यदि (3.2) में $u\rightarrow 1,\ w\rightarrow 0$ रखें और (1.4) को व्यवहृत करें तो नायर[6] द्वारा प्राप्त परिणाम मिलता है ।

पुनः, (3.2) में $\mu \to 0$ रखने एवं (1.4) का सम्प्रयोग करने पर हमें नायर[6] का दूसरा परिणाम प्राप्त होता है।

आगे भी, यदि (3.2) में $u \to 1$, $\delta \to 0$ लें तथा (1.4) को सम्प्रयुक्त करें तो हमें गुप्ता तथा जैन[3] का परिणाम प्राप्त होता है।

(iii). यदि (2.1) में

$$n_1 = p_1 = q_1 = 0,\ m_3 = p_3 = 1,\ n_3 = 0,\ q_3 = 2,\ \delta \to 1,$$

$$e_1 = h,\ f_1 = k,\ f_2 = h,\ E_1 = F_1 = F_2 = 1$$

लें तथा (1.5) का उपयोग करें तो हम निम्नलिखित रोचक परिणाम प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty x^{\lambda+wk-1}(a+bx-Bx^w)^{-\mu-k} H_{p_2+1, q_2}^{m_2, n_2+1}\left[\frac{Ax^u}{(a+bx-Bx^w)^v}\middle| \begin{matrix}(1-\mu-k, v), (c_j, \gamma_j)_{1, p_2}\\ (d_j, \delta_j)_{1, q_2}\end{matrix}\right] dx$$

$$= \Gamma(h-k)\, \Gamma(1+k-h)\, a^{\lambda-\mu}\, b^{-\lambda}\, B^{-k}\, H_{2,0:p_2,q_2;1,2}^{0,2:m_2,n_2;1,0}\left[\begin{matrix}A\, b^{-u}/a^{v-h}\\ B\, b^{+w}/a^{1-w}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(1-\lambda: u, w), (1+\lambda-\mu; v-u, 1-w) : (c_j, \gamma_j)_{1, p_2};\ (h, 1)\\ \text{—} \qquad : (d_j, \delta_j)_{1, q_2};\ (k, 1), (h, 1)\end{matrix}\right] \quad (3.3)$$

जहाँ

$$1 > w > 0,\ u < v < 0,\ Re(h-k) > 0,\ Re(1+k-h) > 0,\ Re(\lambda + wk + u\, d_i/\delta_i) > 0,$$

$$Re(w\mu - \lambda + (vw-u)\, d_i/\delta_i) > 0,\ i = 1, \ldots, m_2).$$

विशेषतः यदि हम (3.3) में $w \to 0$, $u \to 0$, $m_2 = q_2 = 2$, $n_2 = p_2 = 0$, $b = v = 1$, $d_1 = 1-\alpha$, $d_2 = 1-\beta$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$ रखें और (1.5) को व्यवहृत करें तो थोड़े से सरलीकरण के फलस्वरूप हमें हरीशंकर[4] के द्वारा प्राप्त ह्विटेकर फलन का समाकल निरूपण प्राप्त होता है।

(iv). जब $\sigma \to 0$ तो (2.2) से नायर[6] द्वारा प्रदत्त H-फलन का समाकलन निरूपण प्राप्त होता है।

(v). यदि $\rho \to 0$ तो (2.2) से गुप्ता तथा जैन[3] का परिणाम मिलता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० के० सी० गुप्ता ने जो मार्ग-दर्शन किया उसके लिए लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compos. Math., 1963, **15**, 263-341.

2. एर्डेल्यी इत्यादि, Higher Trancendental function, भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.

3. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइन्स इंडिया,** 1966, **36**, 594-609.

4. हरीशंकर, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1948, **23**, 44-49.

5. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इन्डियन एके० साइन्स**, 1972, **75**, 117-123.

6. नायर, वी० सी०, **पी-एच० डी० थीसिस,** राजस्थान विश्वविद्यालय 1969.

7. नायर, वी० सी० तथा समर, एम० एस०, Univ. Nac. Tucuman Rev., 1973, **23(a),** 187-192.

8. राठी, नवरत्न, Revista Tecnica, Maracaibo-Venezela (प्रकाशनाधीन).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 67-72

स्मृति आश्रित सूक्ष्म द्रवों का मूलभूत सिद्धान्त

एस० के० पाण्डेय तथा आर० एन० पाण्डेय
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इन्स्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर 18, 1981]

सारांश

स्मृति आश्रित सूक्ष्म द्रवों के लिए मूलभूत सिद्धान्त निकाला गया है और कुछ प्रमुख बातों की विवेचना की गई है।

Abstract

Constitutive theory of memory dependent microfluids. *By* S. K. Pandey and R. N. Pandey, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

Constitutive theory for memory dependent microfluids has been developed and a few remarkable points have been discussed. The results obtained in the first part of the paper have been studied for isothermal system as a particular case.

1. प्रस्तावना

सर्वप्रथम एरिंजेन[1, 2] ने सफलतापूर्वक द्रव सूक्ष्म सांतत्य (Fluid micro continua) सिद्धांत का सूत्रीकरण किया जिसमें विरूपणीय सूक्ष्म तत्वों वाले द्रव की यांत्रिकी पर विचार किया गया। एलेन इत्यादि[3] ने भी एरिंजेन के सिद्धांत की तरह का एक सिद्धांत निकाला जिसे सरल विरूपणीय निदेशित द्रव कहते हैं। इसका विस्तार करते हुए क्लिने तथा एलेन[4] ने सिद्धांत निकाला जो ऐसे द्रवों के प्रवाह को नियन्त्रित करता है जिसमें अनियमित आकार के विरूपणीय तथा निलम्बनीय कण होते हैं। किर्वान[5] ने सूक्ष्म द्रवों के गतिविज्ञान तथा मूलभूत कल्पनाओं के सम्बन्ध में भौतिक प्रेक्षण किये।

प्रस्तुत प्रपत्र में स्मृति आश्रित सूक्ष्म द्रवों के लिए मूलभूत सिद्धांत निकाला गया है जिसमें क्लासियस डुहेम असमिका के परिवर्धित रूप का उपयोग किया गया है।

2. मूलभूत सिद्धान्त

मूलभूत सम्बन्धों की स्थापना के लिए हम निम्नलिखित एंट्रापी असमिका[1] का उपयोग करेंगे

$$-\frac{P}{\theta}(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})+\frac{1}{\theta}t_{kl}\ v_{l,k}+\frac{1}{\theta}(\mathbf{t}_{kl}-\mathbf{t}_{kl})\ \nu_{lk}+\frac{1}{\theta}t_{klm}\ v_{lm,k}\quad+\frac{1}{\theta}q_k\ \theta,\quad k\leqslant 0. \qquad (2.1)$$

जहाँ $\psi=(\epsilon-\eta\theta)$ मुक्त ऊर्जा है, θ परम ताप, P संहति घनत्व, $\mathbf{t}_{kl}=\mathbf{t}_{kl}$ अपरूपण माध्य टेंसर, $t_{kl}=$ अपरूपण टेंसर, t_{klm} प्रथम घूर्ण टेंसर, ϵ आंतरिक ऊर्जा घनत्व, q_k उष्मा अभिवाह (heat flux), η एंट्रापी घनत्व, v_k वेग सदिश घटक, v_{kl} परिभ्रमण टेंसर तथा विराम चिन्ह के बाद के पादांक आंशिक अवकलजों को सूचित करते हैं। ऊपर के विन्दु से पदार्थ व्युत्पन्न सूचित होता है।

विकृति मापों के विभिन्न समुच्चयों में से हमें एक की आवश्यकता होगी जिसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं[6]

$$\left.\begin{aligned} C_{pq}{}^t(s)&=C_{pq}(t-s)=Y_{\alpha,p}(t-s)\ \ Y_{\alpha,q}(t-s)\\ D_{pq}{}^t(s)&=D_{pq}(t-s)=Y_{\alpha,p}(t-s)\ \ X_{\alpha q}(t-s)\\ \Gamma_{pqr}{}^t(s)&=\Gamma_{pqr}(t-s)=Y_{\alpha,p}(t-s)\ \ X_{\alpha q,r}(t-s)\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

जब $Y_{\alpha,p}$ विस्थापन प्रवण तथा $X_{\alpha q,r}$ सूक्ष्म विस्थापन प्रवण टेंसर है।

वर्तमान सिद्धांत के विस्तार-क्षेत्र के भीतर सूक्ष्मद्रव (micro fluid) की परिभाषा मूलभूत समीकरणों के समुच्चय द्वारा हेल्महोल्ट्ज की मुक्त ऊर्जा, अपरूपण, अपरूपण माध्य, सूक्ष्म अपरूपण घूर्ण टेंसर, एंट्रापी तथा उष्मा अभिवाह सदिश के अनुक्रिया फलकों के पदों के रूप में दी जाती है। इनमें से प्रत्येक अनुक्रिया फ़लनक विरूपण, सूक्ष्म विरूपण, ताप तथा विशिष्ट आयतन तथा सूक्ष्म जड़त्व टेंसर के वर्तमान मूल्यों पर निर्भर है।

इस प्रकार :

$$\psi=F[\mathbf{C}^t(s),\quad \mathbf{D}^t(s),\quad \mathbf{F}^t(s),\quad \theta^t(s),\quad v,\ i_k], \qquad (2.3)$$

जहाँ $\mathbf{C}^t(s)$, $\mathbf{D}^t(s)$, $\mathbf{F}^t(s)$ अपरूपण तथा सूक्ष्म अपरूपण टेंसर हैं, v विशिष्ट आयतन है तथा i_k सूक्ष्म जड़त्व टेंसर हैं।

अब हम मूलभूत फलनकों को उनके विगत इतिहासों के अनुसार न कि समग्र इतिहासों के आधार पर व्यक्त करने के लिए चुनते हैं। इस तरह (2.3) निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$$\psi=F[\mathbf{C}_r{}^t(s),\ \mathbf{D}_r{}^t(s),\ \mathbf{F}_r{}^t(s),\ \theta_r{}^t(s),\ \mathbf{C},\ \mathbf{D},\ \mathbf{F},\ \theta,\ v,\ i_k]. \qquad (2.4)$$

किन्तु (2.2) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{C}(t)=\mathbf{I} \\ \mathbf{D}(t)=\mathbf{I} \\ \mathbf{T}(t)=\mathbf{0} \end{array}\right\} \qquad (2.)$$

i_k को उनके निश्चरों i_j $(J=1, 2, 3)$ के पदों में निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है :

$$i_1=i_{kk}, \; i_2=\frac{1}{2}\, i_{kl}\, i_{lk} \;\; i_3=\frac{1}{3}\, i_{kl}\, i_{lm}\, i_{mk} \qquad (2.6)$$

इस प्रकार (2.3) को निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$\psi=F[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, i_3,\theta]. \qquad (2.7)$$

यहाँ (2.5) के परिप्रेक्ष्य में क्रमशः $\mathbf{C}_r{}^t(s)$, $\mathbf{D}_r{}^t(s)$, $\Gamma_r{}^t(s)$ तथा $\mathbf{C}^t(s)$, $\mathbf{D}^t(s)$, $\Gamma^t(s)$ के मध्य अन्तर करना वृथा है।

समउपस्थिति अभिगृहीत[7] (axiom of equipresence) का व्यवहार करने पर अपरूपण, अपरूपण माध्य, प्रथम अपरूपण घूर्ण टेंसर एंट्रापी तथा उष्मा अभिवाह सदिश के लिए सीधे उसी रूप में समीकरण लिखे जा सकते हैं।

(2.1) में (2.7) को प्रविष्ट करके उसकी उपयुक्तता की परीक्षा करने के लिए यह आवश्यक होगा कि हम कतिपय मूलभूत फलनकों के परिवर्तन की कालदरों को संगठित करें। इसके लिए फ्रेचटे अवकलन[7] के उपयोग किये जाने की आवश्यकता है। इसके लिए हम कल्पना करेंगे कि विरूपण, सूक्ष्म विरूपण तथा ताप के इतिहासों तथा उनके वर्तमान मूल्यों में आंशिक व्यवकलज होते हैं जो $0\leqslant s=\infty$ परास में समस्त t के लिए संतत हैं तथा फलनक F अवकलनीय है।

(2.1) में (2.7) तथा (2.2) को प्रयुक्त करने तथा जिन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत परिणामी असमिका का उल्लंघन नहीं होता है हम पाते हैं कि

$$t_{kl}=\pi\delta_{kl}+\frac{1}{v}\{(\delta_{ckm}+\delta_{cmk})\, F[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \theta_r{}^t(s), \Gamma^t(s); v\, i_1, i_2, i_3, \theta|-C_{ml}{}^t(s)]$$

$$+\delta_{Dkm}\, F[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); i_1, i_2, i_3, \theta|-D_{ml}{}^t(s)]$$

$$+(\delta_{\Gamma kpm}+\delta_{\Gamma kmp})\, F(\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s)\, \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v\, i_1, i_2, i_3, \theta|-\Gamma_{mpl}]\}, \qquad (2.8)$$

$$\mathbf{t}_{kl}=t_{kl}+\pi_{kl}+1/v\, \{\delta_{Dkm}\, F[\mathbf{C}^t(s),\mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, i_3\, \theta|-D_{ml}{}^t(s)]$$

$$+\delta_{rkmp}\, F[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, i_3\, \theta| -\Gamma_{pml}{}^t(s)]\} \quad (2.9)$$

$$t_{klm} = 1/v\, \delta\Gamma_{klp}\, F[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, i_3, \theta| -D_{pm}{}^t], \quad (2.10)$$

$$\eta = -\frac{\partial}{\partial\theta} F(\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s): v, i_1, i_2, i_3, \theta], \quad (2.11)$$

जो स्मृति आश्रित सूक्ष्म द्रवों के लिए मूलभूत सम्बन्ध हैं।

एंट्रापी असमिका का रूप है

$$\sigma + \frac{1}{\theta^2} q_k\, \theta,\ k \geqslant 0, \quad (2.12)$$

जहाँ

$$\sigma = \delta_C\, F\left[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, t_3, \theta| -\frac{d\mathbf{C}^t(s)}{ds}\right]$$

$$+\delta_D\, F\left[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); i_1, i_2, i_3, \theta| -\frac{d\mathbf{D}^t(s)}{ds}\right]$$

$$+\delta_\Gamma\, F\left[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, i_3, \theta| -\frac{d\mathbf{\Gamma}^t(s)}{ds}\right]$$

$$+\delta_\theta\, F\left[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s), \theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, i_3, \theta| -\frac{d\theta_r{}^t(s)}{ds}\right], \quad (2.13)$$

जिसे आंतरिक क्षय भी कहा जाता है।

विवेचना

(2.8) से हम देखते हैं कि प्रथम पद π, उष्मागति के दाब ($\pi = \partial/\partial\, v\, F[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s)$ $\theta_r{}^t(s); v, i_1, i_2, i_3, \theta]$) का उदय मुक्त ऊर्जा F के विशिष्ट आयतन पर आश्रित होने के कारण होता है।

और भी, (2.9) में पद

$$\pi_{kl}\left(= -2\rho\left\{\frac{\partial F}{\partial i_1} i_{kl} + \frac{\partial F}{\partial i_2} i_{km}\, i_{ml} + \frac{\partial F}{\partial i_3} i_{km}\, i_{mp}\, i_{pl}\right\}\right)$$

संमित उष्मागतिक दाब है। यह सुस्पष्ट है कि यह दाब टेंसर सूक्ष्म जड़त्व पर मुक्त ऊर्जा फलनक F पर आश्रित होने के कारण उत्पन्न होता है। यह प्रभाव उन द्रवों के लिए विलुप्त हो जाता है जो स्थायी रूप से $v_{kl} = v_{ik}$ की तुष्टि करते हैं अर्थात् सूक्ष्म ध्रुवीय द्रवों के लिए जो सूक्ष्म द्रवों का एक उपप्रश्न है।

पुनश्च, (2.13) से यह स्पष्ट है कि आन्तरिक क्षय सूक्ष्म तथा स्थूल विरूपण टेंसरों तथा ताप इतिहास के कारण जन्य क्षयों का योग होता है।

इस प्रकार हम निम्नलिखित प्रमेय तक पहुँचते हैं :

प्रमेय : समस्त वैध उष्मागतिक प्रक्रमों के लिए अपरूपण, सूक्ष्म-अपरूपण औसत, अपरूपण घूर्ण टेंसर, एंट्रापी ऊर्जा मुक्त ऊर्जा से व्युत्पन्न किये जा सकते हैं। आन्तरिक क्षय को मुक्त ऊर्जा फलन से ज्ञात किया जाता है जो सामान्य एंट्रापी असमिका की तुष्टि करता है।

निस्संदेह $\hat{q}$ मुक्त ऊर्जा फलनक से प्राप्त नहीं है किन्तु अन्य फलनकों के साथ यह प्रतिबन्ध (2.12) द्वारा नियंत्रित है। इस प्रकार

$$\hat{q}=Q[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \Gamma^t(s),\ \theta_r{}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3,\ \theta].$$

विशिष्ट दशा

किसी समतापीय प्रक्रम के लिए स्थिर ताप इतिहास को परिभाषित करने के लिए हम θ को स्थिर ताप मान लेते हैं क्योंकि

$$\theta^t(s)=\theta_0 I^t(s), \tag{2.14}$$

जहाँ $I^t(s)=1,\ 0\leqslant s<\infty$ फलन है जो धन वास्तविक अक्ष को वास्तविक संख्या 1 के रूप में चित्रित करता है। अब प्रतिबन्ध (2.14) के अन्तर्गत हम (2.7) से लेकर (2.13) तक के सम्बन्धों को सरलतापूर्वक निम्न रूप में रूपान्तरित कर सकते हैं

$$\begin{aligned} t^*_{kl}=&\ \pi^*\delta_{kl}+1/v\{(\delta_{Ckm}+\delta_{Cmk})\ F^*[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3|\ -C^t{}_{ml}(s)] \\ &+\delta_{Dkm}\ F^*[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3|-D^t{}_{ml}(s)] \\ &+(\delta_{Pkmp}+\delta_{Fkmp})\ F^*[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3|-\Gamma_{pml}{}^t(s)]\}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^*_{kl}=&\ t^*_{kl}+\pi^*_{kl}+1/v\{\delta_{Dkm}|F^*[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \mathbf{F}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3|-D_{ml}{}^t(s)] \\ &+\delta_{Fkmp}\ F^*[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3|-\Gamma^t{}_{pml}(s)]\}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$t^*_{klm}=1/v\ \delta_{Fkmp}\ F^*[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3|-D_{pl}{}^t(s)], \tag{2.17}$$

$$\eta^*=-\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}F\Big[\mathbf{C}^t(s),\ \mathbf{D}^t(s),\ \mathbf{\Gamma}^t(s),\ \theta_r{}^t(s);\ v,\ i_1,\ i_2,\ i_3,\ \theta\Big]\right\}_{\theta=\theta_0 I^+(s)} \tag{2.18}$$

और सामान्य क्षय असमिका निम्न में समानीत हो जाती है

$$\delta_C F^*\left[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v, i_1, i_2, i_3 \Big| \frac{d\mathbf{C}^t(s)}{ds}\right]$$

$$+\delta_D F^*\left[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v, i_1, i_2, i_3, \Big| \frac{d\mathbf{D}^t(s)}{ds}\right]$$

$$+\delta_\Gamma F^*\left[\mathbf{C}^t(s), \mathbf{D}^t(s), \mathbf{\Gamma}^t(s);\ v, i_1, i_2, i_3 \Big| \frac{d\mathbf{\Gamma}^t(s)}{ds}\right] \geqslant 0 \qquad (2.19)$$

जहाँ तारांकित मात्रायें समतापीय तन्त्रों के लिए उनके मानों को बताती हैं ।

यहाँ हम (2.19) से पाते हैं कि आंतरिक क्षय पूरी तरह सूक्ष्म तथा स्थूल विरूपण टेंसर के कारण है । निष्कर्षतः हम पाते हैं कि समतापीय तन्त्र के लिए स्थूल तथा सूक्ष्म विरूपण टेंसरों के इतिहास के कारण आंतरिक क्षय का योग अ-नृण होना चाहिए ।

निर्देश

1. एरिंजेन, ए० सी०, Int. J. Engng. Sci., 1964, **2**, 205.
2. वही, Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech. 1964, 131.
3. एलेन, एस० जे०, डिसिल्वा, सी०एन० तथा क्लिने, के० ए०, Phys. Fluids 1967, **10**, 2551.
4. क्लिने, के० एल० तथा एलेन, एस० जे०, Angeu Math. Phys., 1968, **19**, 425, 878.
5. किर्वान, ए० डी० (जूनियर), Phys. Fluids., 1968, **11**, 1440.
6. पांडे, एस० के०, पी-एच० डी० थीसिस, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, 1977.
7. एरिंजेन, ए० सी० Nonlinear Theory of Continuous Media, मैकग्राहिल न्यूयार्क 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 73-83

घूर्णी चैनेल में से धूलमय श्यान द्रव का अस्थायी जलचुम्बकीय प्रवाह

एच० एल० अग्रवाल, एस० एस० सिंह तथा पी० सी० राम
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—अप्रैल 26, 1980]

सारांश

समान्तर प्लेट चैनेल में कोणीय वेग Ω से घूर्णित एवं अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में समरूप से वितरित धूलकणों से युक्त एक असंपीड्य श्यान द्रव के स्थायी प्रवाह पर विचार किया गया है। द्रव के वेग तथा विचरणशील दाब प्रवण के अन्तर्गत धूल कणों के वेग के लिये वैश्लेषिक व्यंजक प्राप्त किये गये हैं। वितरण के वेग पर क्षय प्राचल λ तथा K^2 के प्रभावों का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Unsteady hydromagnetic flow of a dusty viscous liquid in a rotating channel. *By* H. L. Agrawal, S. S. Singh and P. C. Ram, Department of Applied Mathematics, Institute of Tecnology, B. H. U, Varanasi.

An analysis of the unsteady flow of an incompressible viscous fluid with uniform distribution of dust particles in a parallel plate channel rotating with an angular velocity Ω, in the presence of transverse magnetic field is carried out. Analytical expressions for the velocity of the fluid and that of dust particles under the influence of variable pressure gradient have been derived. The effects of the decay parameter λ and K^2 on the velocity distributions are studied.

असंपीड्य, श्यान तथा वैद्युतचालक द्रवों के सम्बन्ध में हाल में एक चपटी प्लेट में से होकर अपरिवर्ती तथा परिवर्ती *MHD* प्रवाहों का अध्ययन किया गया है।[1–10] इधर के वर्षों में द्रव गतिविज्ञान के क्षेत्र में कार्य करने वाले अपना अधिकाधिक ध्यान श्यान द्रवों के प्रवाह पर धूलिकणों के प्रभाव के अध्ययन में देते रहे हैं। साफमैन[11] ने धूलमय गैस के स्तरीय प्रवाह (laminar flow) के स्थायित्व की विवेचना की है। इसमें धूल कणों का आकार एकसमान था किन्तु धूलि की सांद्रता कम थी। गैस घनत्व

की तुलना में धूल कणों का घनत्व अधिक था, इन समीकरणों का उपयोग करते हुये मिशायल तथा मिलर[12] ने दृढ़ समतल परिसीमा के ऊपर अर्ध-अनन्त आकाश घेरे हुए धूलमय गैस की गति की विवेचना की है। राव[13] ने एकसमान पाइप में से होकर धूलमय द्रव के अस्थायी प्रवाह का समय के साथ घातांकी दाब प्रवण के अन्तर्गत अध्ययन किया है। रेड्डी[14] ने वैसे ही दाब प्रवण के अन्तर्गत एक समचतुर्भुजाकार चैनेल के सम्बन्ध में शोधकार्य किया। नाथ[15] ने धूलमय द्रव के अस्थायी प्रवाह का अध्ययन दो घूर्णी सहअक्षीय सिलिंडरों में किया।

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने ऐसे धूलमय श्यान द्रव के अस्थायी प्रवाह पर विचार किया है जो दो समान्तर अनन्त भित्तियों के बीच में कोणीय वेग के साथ एक अक्ष पर जो उनके तलों पर लम्ब है अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में घूर्णन कर रहा है।

गणितीय विश्लेषण

श्यान असंपीड्य द्रव के लिए, अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में धूलकणों के एकसमान वितरण होने पर गति तथा सांतत्य के समीकरण निम्न प्रकार से लिखे जावेंगे।

सांतत्य समीकरण

$$\text{div}\,\vec{u}=0 \tag{1}$$

$$\text{div}\,\vec{v}=0 \tag{2}$$

संवेग समीकरण

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+2\vec{\Omega}\times\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p+\nu\nabla^2\vec{u}$$

$$+\frac{K'N_0}{\rho}(\vec{v}-\vec{u})+\frac{1}{\rho}(\vec{J}\times\vec{B}), \tag{3}$$

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+2\vec{\Omega}\times\vec{v}\right)=K'(\vec{u}-\vec{v}) \tag{4}$$

मैक्सवेल का समीकरण

$$\text{div}\,\vec{B}=0,\ \text{curl}\,\vec{H}=\vec{J},\ \text{curl}\,\vec{E}=0 \tag{5}$$

ओह्म का नियम

$$\vec{J}=\sigma(\vec{u}\times\vec{B}), \tag{6}$$

जहाँ $\vec{u}$, $\vec{v}$ क्रमशः द्रव तथा धूल कणों के वेग हैं। $\vec{\Omega}$ निकाय का कोणीय वेग है जो स्थिर जडत्वीय फ्रेम तथा $p=p'-\rho/2\,|\vec{\Omega}\times\vec{r}|^2$, के सन्दर्भ में है, जहाँ p' से द्रव दाब तथा $\vec{r}$ से घूर्णन अक्ष से स्थिति सदिश सूचित होते हैं, ρ द्रव का घनत्व है, ν श्यानता है, m धूल कणों की संहति, K' स्टोक का

प्रतिरोधकता गुणांक है जो ϵ त्रिज्या वाले गोलीय कणों के लिए $6\pi\mu\epsilon$ है, जहाँ μ द्रव की श्यानता है। N_0 धूल कणों का संख्या घनत्व है और गति की अवधि में स्थिर है, $\vec{J}$ धारा घनत्व है, $\vec{B}$ चुम्बकीय प्रेरण सदिश है, $\vec{E}$ विद्युत क्षेत्र सदिश है, $\vec{H}$ चुम्बकीय क्षेत्र सदिश $(\vec{B}=\mu e\ \vec{H})$, μe चुम्बकीय प्रवेश्यता तथा σ द्रव की वैद्युत चालकता है जो अदिश संख्या के रूप में परिकल्पित है।

प्रस्तुत विश्लेषण में निम्नलिखित महत्वपूर्ण कल्पनाएं की गई हैं

1. धूल के कणों की आकृति गोलीय है और वे समान रूप से वितरित हैं।
2. कणों एवं तरल के मध्य रासायनिक अभिक्रिया, द्रव्यमान स्थानान्तरण तथा विकिरण को उपेक्षित कर दिया गया है।
3. कण के भीतर ताप एकसमान है।
4. स्वयं कणों के मध्य अन्योन्य क्रिया पर विचार नहीं किया गया।
5. प्रवाह पूर्णतया विकसित है।
6. उत्प्लावकता बल की उपेक्षा की गई है।
7. सम्पूर्ण गति के अन्तर्गत धूल कणों का संख्या घनत्व स्थिर है।

यदि घटना को प्रयोगशाला स्तर पर सीमित करके देखा जाय तो हम चुम्बकीय रेनाल्ड संख्या को लघु मान सकते हैं और इस तरह प्रयुक्त चुम्बकीय क्षेत्र की तुलना से प्रेरित चुम्बकीय क्षेत्र की उपेक्षा की जा सकती है। यही नहीं, विद्युत क्षेत्र E को शून्य मान लिया गया है।

हम ऐसी कार्टीजियन निकाय का चुनाव करेंगे कि Z-अक्ष पट्टिकाओं पर लम्ब है, $z=\pm h$। X-अक्ष Z-अक्ष की समान्तर दिशा में ली गई है। चूँकि पट्टिकायें x तथा y दिशाओं में अनन्त हैं अतः अस्थायी दशा के लिए उत्पन्न क्षेत्र केवल z तथा t पर निर्भर करेंगे।

$\vec{u}$, $\vec{v}$ वेगों को

$$\vec{u}=(u_1, u_2, 0) \tag{7}$$

$$\vec{u}=(v_1, v_2, 0) \tag{8}$$

के रूप में कल्पित किया जा सकता है। तब गति के समीकरण निम्नांकित में समानीत हो जाते हैं।

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-2\Omega u_2=-\frac{1}{\rho}\ \partial p/\partial x+\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+\frac{K'N_0}{\rho}(v_1-u_1)$$
$$-\frac{\sigma}{\rho}B_0^2\,u_1, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+2\,\Omega u_1= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial d}+\nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+\frac{K'N_0}{\rho}(v_2-u_2)-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}u_2 \tag{10}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{11}$$

$$m(\partial v_1/\partial t-2\Omega v_2)+K'(u_1-v_1) \tag{12}$$

$$m(\partial v_2/\partial t+2\Omega v_1)=K'(u_2-v_2), \tag{13}$$

जहाँ B_0 पट्टिका पर लम्ब एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र है।

समीकरण (11) घूर्णन के अक्ष के साथ द्रव गतिशील दाब के स्थायित्व को प्रदर्शित करता है। हम यह कल्पना करेंगे कि द्रव x-अक्ष की दिशा में समान्तर पट्टिकाओं $z=\pm h$ के मध्य विचरणशील दाब प्रवण के प्रभाव के अन्तर्गत प्रवाहित होता है। इस समस्या के लिए उपयुक्त परिसीमा प्रतिबन्ध निम्नवत् हैं :

$$z=\pm h : u_1=0,\quad u_2=0;\ v_1=0,\ v_2=0. \tag{14}$$

परिसीमा प्रतिबन्धों (14) के अन्तर्गत (9), (10), (12) तथा (13) समीकरणों को हल करना अत्यन्त जटिल है। गणितीय अंश को सरल करने के लिए हम संकर वेगों का समावेश कर रहे हैं, जिन्हें इस प्रकार परिभाषित किया गया है।

$$q_1=u_1+iu_2 \text{ तथा } q_2=v_1+iv_2, \tag{15}$$

इससे हम उपर्युक्त समीकरणों को अविमीय रूप में निम्नलिखित दो समीकरणों में बार (रेखा) हटाकर संयुक्त करने में समर्थ हो जाते हैं

$$\frac{\partial q_1}{\partial t}+2i\,K^2 q_1=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2}+(l/f)\,(q_2-q_1)-M^2 q_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t}+2\,i\,K^2\,q_2=-(l/f)\,(q_2-q_1), \tag{17}$$

अब हम निम्नलिखित अ-विमीय मात्राओं को समाविष्ट करते हैं :

$$\mathbf{x}=(x/h),\quad \mathbf{z}=(z/h),\quad \mathbf{u}_1=(u_1h/\nu),\quad \mathbf{u}_2=(u_2h/\nu),$$

$$\mathbf{v}_1=(v_1h/\nu),\quad \mathbf{v}_2=(v_2h/\nu),\quad \mathbf{p}=(ph^2/\rho\nu^2),\quad K^2=(\Omega h^2/\nu)$$

$$l=(mN_0/\rho),\quad f=m\nu/K'h^2),\quad \mathbf{t}=(\nu t/h^2),\quad \lambda=\lambda h^2/\nu),$$

$$M=\sqrt{\frac{\sigma}{u}}\,.\,B_0h, \tag{18}$$

जहाँ M हार्टमैन अंक है।

पुनः (15) तथा (18) के परिप्रेक्ष्य में समीकरण (14)

$$z=\pm 1, \quad q_1=0, \quad q_2=0. \tag{19}$$

में समानीत हो जाता है। माना कि दाब प्रवण रैखिकतः विचरण करता है और तब हम कल्पना करेंगे कि $-\partial p/\partial x = a_0+\lambda t$. (20)

(20) के परिप्रेक्ष्य में हम व्यक्त कर सकते हैं

$$q_1=f_1(z)\,(a_0-\lambda t) \text{ तथा } q_2=f_2(z)\,(a_0+\lambda t) \tag{21}$$

(16) तथा (17) में (20) तथा (21) को प्रतिस्थापित करने और उन्हें परिसीमा प्रतिबन्धों $f(\pm 1)=0$ के द्वारा हल करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$q_1=(1/\beta^2)\left\{1-\frac{\cosh \beta z}{\cosh \beta}\right\}(a_0+\lambda t) \tag{22}$$

तथा

$$q_2=\frac{\left(1+\dfrac{f\lambda}{a_0+\lambda t}-2ifK^2\right)}{\left(1+\dfrac{f\lambda}{a_0+\lambda t}\right)^2+4f^2K^2}\cdot\frac{(a_0+\lambda t)}{\beta^2}\left(1-\frac{\cosh\beta z}{\cosh\beta}\right), \tag{23}$$

जहाँ

$$\beta^2=\frac{\left(\dfrac{\lambda}{a_0+\lambda t}+2iK^2\right)\left(1+l+M^2f+\dfrac{f\lambda}{a_0+\lambda t}+2ifK^2\right)+M^2}{\left(1+\dfrac{f\lambda}{a_0+\lambda t}+2ifK^2\right)}$$

समीकरणों (22) तथा (23) में वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को पृथक्कृत करने पर

$$u_1=(a_0+\lambda t)\left[\frac{(A_1^2-A_2^2)}{(A_1^2+A_2^2)^2}-\frac{(A_1^2-A_2^2)\,A_{11}+2A_1A_2A_{12}}{(A_1^2+A_2^2)^2\,A_{13}}\right] \tag{24}$$

$$u_2=(a_0+\lambda t)\left[\frac{2A_1A_2}{(A_1^2+A_2^2)^2}+\frac{(A_1^2-A_2^2)\,A_{12}-2A_1A_2A_1}{(A_1^2+A_2^2)^2\,A_{13}}\right] \tag{25}$$

$$v_1=\frac{(1+(f\lambda/a_0-\lambda t)\,u_1+2fK^2u_2}{T^2} \tag{26}$$

तथा

$$v_2=\frac{1+(f\lambda/a_0+\lambda t)-2fK^2u_1}{T^2} \tag{27}$$

जहाँ

$$A_{11}=\cosh A_1 \cos A_2 \cosh A_1z \cos A_2z+\sinh A_1 \sin A_2 \sinh A_1z \sin A_2z$$

$$A_{12}=\cosh A_1 \cos A_2 \sinh A_1z \sin A_2z-\sinh A_1 \sin A_2 \cosh A_1z \cos A_2z$$

$$A_{13}=\cosh^2 A_1 \cos^2 A_2+\sinh^2 A_1 \sin^2 A_2$$

$$T\,A_1=(\alpha_1 \beta_1+\alpha_2\beta_2)$$

$$T\,A_2=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)$$

$$T^2=\left(1+\frac{f\lambda}{a_0+\lambda t}\right)^2+4f^2K^4$$

$$\alpha_1=\left[\frac{1}{2}\left\{\xi_1+\sqrt{\left(\xi_1^2+4K^4\xi_2^2\right)}\right\}\right]^{1/2}$$

$$\alpha_2=\left[\frac{1}{2}\left\{-\xi_1+\sqrt{\left(\xi_1^2+4K^4\xi_2^2\right)}\right\}\right]^{1/2}$$

$$\beta_1=\left[\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{f\lambda}{a_0+\lambda t}\right)+\sqrt{\left(\left(1+\frac{f\lambda}{a_0+\lambda t}\right)^2+4f^2K^4\right)}\right\}\right]^{1/2}$$

$$\beta_2=\left[\frac{1}{2}\left\{-\left(1+\frac{f\lambda}{a_0+\lambda t}\right)+\sqrt{\left(\left(1+\frac{f\lambda}{a_0+\lambda t}\right)^2+4f^2K^4\right)}\right\}\right]^{1/2}$$

$$\xi_1=\frac{\lambda}{a_0+\lambda t}\left(1+l+f\,M^2+\frac{f\lambda}{a_0+\lambda t}\right)+M^2-4fK^4$$

$$\xi_2=\left(1+l+fM^2+\frac{2f\lambda}{a_0+\lambda t}\right).$$

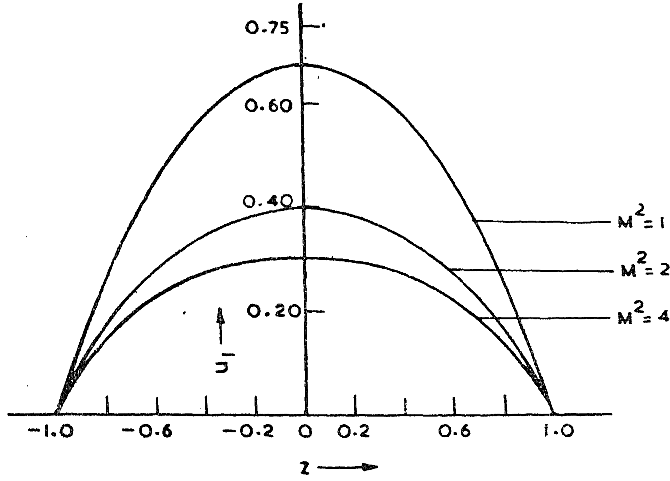
निष्कर्ष

चित्र 1-8 में प्रारूपी अ-विमीय वेग परिच्छेदिकायें प्रदर्शित हैं जब

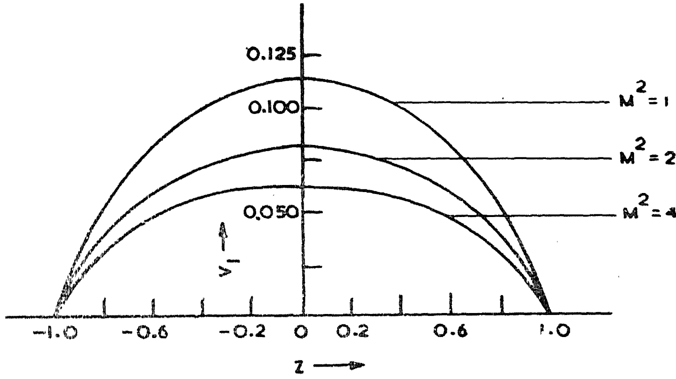
$$l=0.2,\quad f=0.8,\quad a_0=1 \quad \text{तथा} \quad \lambda=1.$$

यदि हम पहले दाब प्रवण की दिशा में द्रव तथा धूल कणों की वेग परिच्छेदिकाओं पर विचार करें तो हमें निम्नलिखित बातें दिखेंगी।

चित्र 1 तथा 2 से दृष्टिगोचर होगा कि K^2 तथा λ के लघु मानों के लिए द्रव तथा धूल कणों की वेग परिच्छेदिकाएं परावलयी और u_1 तथा v_1 के उच्चिष्ठ केन्द्र पर रहती हैं। इन चित्रों से यह भी निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि निश्चित समय के लिये द्रव तथा धूल कणों की वेग परिच्छेदिकाएं चुम्बकीय क्षेत्र में वृद्धि के साथ घटती जाती हैं।



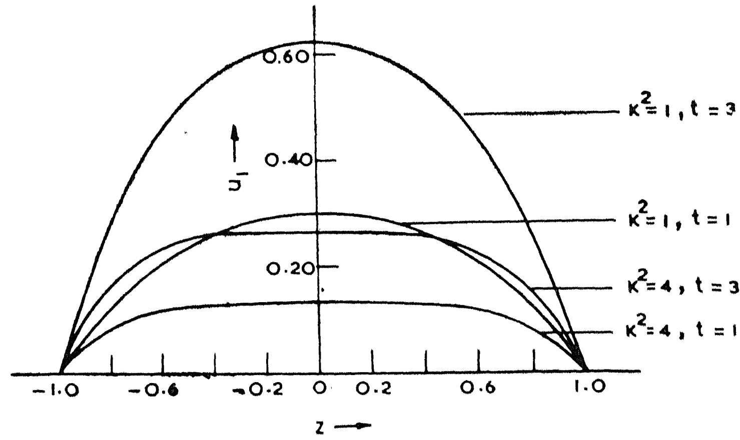
चित्र 1 द्रव के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ
($l=0.2, f=0.8, a_0=1, \lambda=1, t=1, K^2=1$)



चित्र 2 धूल कणों के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ
($l=0 2, f=0.8, a_0=1, \lambda=1, t=1, K^2=1$)

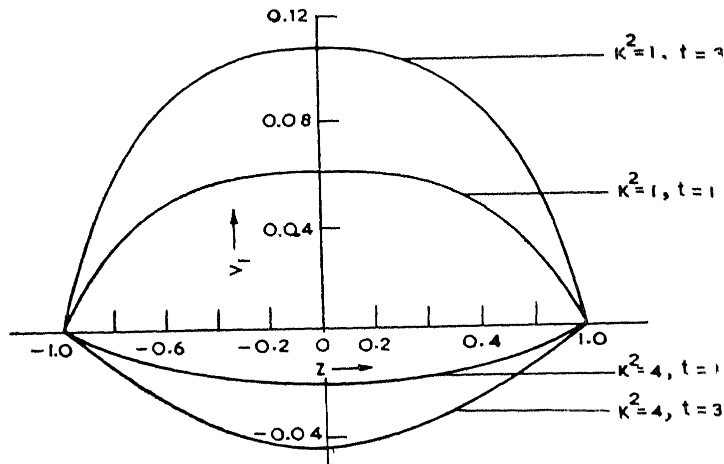
चित्र 3 तथा 4 से λ के लघुमानों के लिए द्रव तथा धूल कणों की वेग परिच्छेदिकाएं परावलयी होती हैं और समय में वृद्धि के साथ स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में बढ़ती जाती हैं। इन चित्रों से यह भी ज्ञाता हो जाता है कि हार्टमैन संख्या तथा समय के स्थिर मानों पर वेग परिच्छेदिकाएं K^2 में वृद्धि होने के साथ-साथ घटती जाती हैं। K^2 के उच्चमानों पर प्रवाह पलट जाता है।

उपर्युक्त विवेचना से यह स्पष्ट हो जाता है कि x-अक्ष की धनात्मक दिशा में द्रव कणों की गति से यह अर्थ नहीं निकाला जाना चाहिए कि धूल कण भी उसी दिशा में गतिशील होंगे। इस अन्तर का



चित्र 3 द्रव के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ

(l=0.2, f=0.8, a_0=1, λ=1, M^2=4)



चित्र 4 धूल कणों के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ

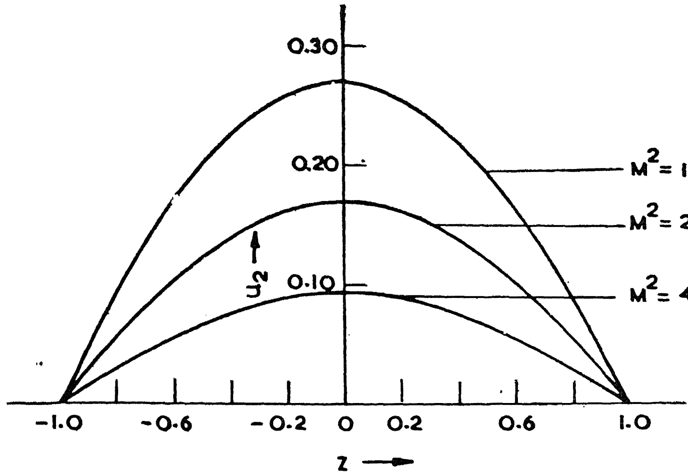
(l=0.2, f=0.8, a_0=1, λ=1, M^2=4)

कारण यह है कि दाब प्रवण प्रत्यक्षतः तरल पर लगता है। तब धूण कण द्रव तथा धूल की गतियों में अन्तर के कारण स्टोक के ड्रैग (drag) के द्वारा गतिशील होता है।

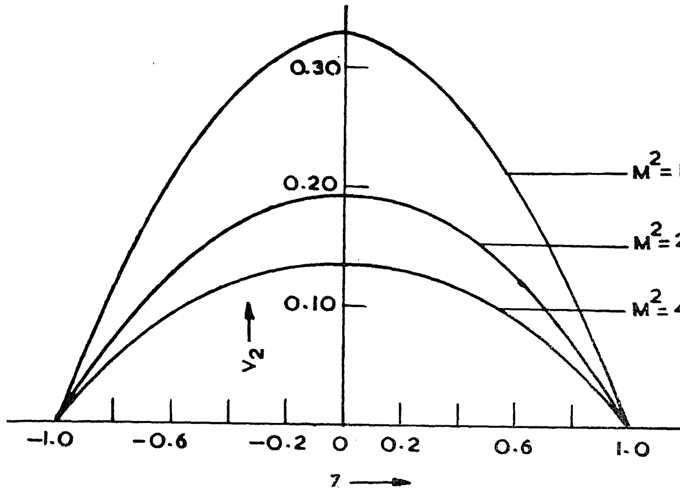
अब हम द्रव तथा धूल कणों के गौण प्रवाह की वेग परिच्छेदिकाओं पर विचार करेंगे।

चित्र 5 तथा 6 प्रदर्शित करते हैं कि स्थिर K^2 तथा समय पर द्रव तथा धूल कणों के गौण प्रवाह की वेग परिच्छेदिकाएं चुम्बकीय क्षेत्र में वृद्धि होने के साथ-साथ घटती जाती हैं। u_2 की परिच्छेदिकाए

कभी भी घूर्णन अक्ष को नहीं काटतीं। इन परिच्छेदिकाओं की आकृति हार्टमैन संख्या के विभिन्न मानों के लिए u_1 तथा v_2 के मानों के सदृश हैं।

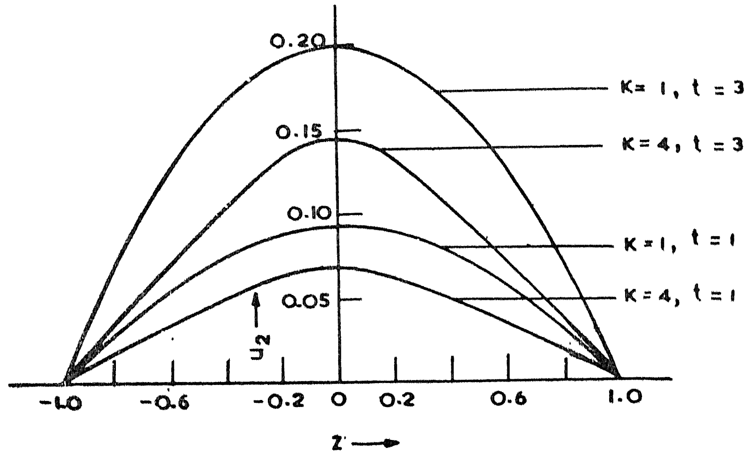


चित्र 5 द्रव के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ
($l=0.2, f=0.8, a_0=1, \lambda=1, t=1, K^2=1$)



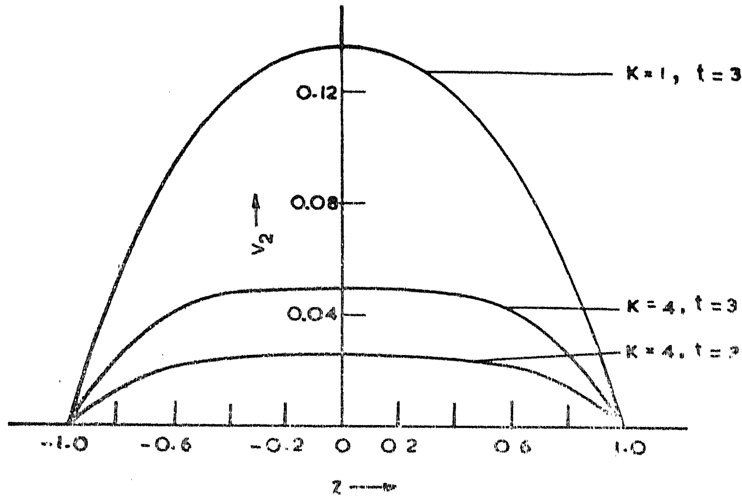
चित्र 6 धूल कणों के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ
($t=0.2, f=0.8, a_0=1, \lambda=1, t=1, K^2=1$)

चित्र 7 तथा 8 प्रदर्शित करते हैं कि स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र तथा K^2 पर वेग परिच्छेदिकाएं समय में वृद्धि के साथ बढ़ती जाती हैं। यह भी देखा जाता है कि स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र तथा समय पर वेग परिच्छेदिकाएं त्यों-त्यों घटती हैं ज्यों-ज्यों K^2 बढ़ता जाता है।



चित्र 7 द्रव के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ

(l=0.2, f=0.8, a_0=1, M^2=4)



चित्र 8 धूल कणों के लिए वेग परिच्छेदिकाएँ

(l=0.2, f=0.8, a_0=1, M^2=4)

उपर्युक्त विवेचना से हम देखते हैं कि द्रव तथा धूल कण सदैव ही गौण प्रवाह के दौरान y अक्ष की ऋणात्मक दिशा में गति करेंगे ।

निर्देश

1. रासो, वी० जे०, NACA Report No. 1958, 1358.
2. गुप्ता, ए० एस०, Phys. Soc. Japan, 1960, **15**, 1894.
3. सून्दलगेकर, वी० एम०, Appl. Sci. Res., 1965, **12B**, 151.
4. सून्दलगेकर इत्यादि, **इन्डियन जर्न० फिजि०**, 1968, **42**, 449.
5. वही, वही, 1968, **42**, 740.
6. दुबे, एस० के०, **गणित**, 1968, **19**, 25
7. पाप, आई०, Zamm, 1968, **48**, 69.
8. पाप सेंट सेरे, Matem., 1968, **20**, 1183.
9. वही, Matem. Vensic (बिओग्रैड), 1969, **6**(**31**), 343.
10. दुबे, एस० के०, Zamm, 1969, **49**, 631.
11. साफमैन, पी० जी०, J. Fluid Mech., 1962, **13**, 120.
12. मिशायल, डो० एच० तथा मिलर, डी० ए०, Mathematica, 1966, **13**, 97.
13. राव, पी० एस० एस०, Def. Sc. J., 1969, **19**, 135.
14. रेड्डी, वाई० बी०, Tensor, 1974, **28**(**3**), 319.
15. नाथ, जी, **प्रोसी० नेश० एके० साइन्स**, 1970, **40**(**3**), 251.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982 Pages, 85-96

समाकल परिवर्तों के मध्य सम्बन्ध

रवीन्द्र
खेतान पालीटेकनिक कालेज, जयपुर
तथा
आर०एस० खण्डेलवाल
गणित विभाग,
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जून 24, 1980]

सारांश

विभिन्न समाकल परिवर्तों के मध्य सम्बन्ध को प्रदर्शित करते हुए कुछ प्रमेय अपने उपप्रमेयों तथा उदाहरणों सहित प्रस्तुत किये गये हैं।

Abstract

Relation between integral transforms. *By* Ravindra and R.S. Khandelwal, Department of Matematics, University of Rajasthan, Jaipur.

Some theorems depicting relationship between various integral transforms are given along with their corollaries and examples.

1. हैंकेल, माइजर बेसेल फलन तथा ψ^n_m परिवर्तों को क्रमशः निम्नवत् परिभाषित किया जावेगा।

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{1/2} J_\nu(pt) f(t)dt, \; p>0, \tag{1.1}$$

$$\phi(p)=\sqrt{2/\pi}\, p\int_0^\infty (pt)^{1/2} K_\nu(pt) f(t), \; R(p)>0, \tag{1.2}$$

$$\psi^n_m\left[f(x) : p : \begin{matrix} a_r, a_s \\ b_i, \beta_j \end{matrix}\right]=\int_0^\infty e^{-1/4npx}\, G^{4,n}_{m+n,m+n+2} \quad \text{एर्डेल्यी}^{[2-4]}$$

$$\left[\frac{p^2x^2}{4}\middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \\ b_1, \ldots, b_4, \beta_1, \ldots, \beta_{m+n-2} \end{matrix}\right] f(x)\, dx \qquad \text{शर्मा}^{[7]} \qquad (1.3)$$

जहाँ m तथा n धन पूर्णाङ्क हैं जिससे कि

$$0 \leqslant m \leqslant 3,\ n \geqslant 0,\ m+n \geqslant 2\ |\arg p| \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2}, +\frac{3-m\pi}{2}\right) \text{ तथा } x^{2bi} f(x) \in L(0, R).$$

(1.1), (1.2) तथा (1.3) समाकल समीकरणों को सांकेतिक रूप में क्रमशः निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जावेगा :

$$\phi(p) \underset{v}{\overset{J}{=}} f(t),\ \ \phi(p) \underset{v}{\overset{k}{-}} f(t) \text{ तथा } \psi_m^n(p) \underset{n,\, m}{\overset{G}{=}} f(t).$$

2. प्रमेय 1 : यदि

$$\phi(p) \underset{v}{\overset{J}{=}} f(t) \qquad (2.1)$$

तथा

$$\psi_m^n(p) \underset{n, m}{\overset{G}{=}} \phi(t^{r/s}) \qquad (2.2)$$

तो

$$\psi_m^n(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} \frac{2^{\lambda+3/2\ r/s-k}}{p^{\lambda+3/2\ r/s+1}} \cdot (2\pi)^{(1-r)(3-m)}$$

$$(r)^{\sum\limits_{i=1}^{4} b_i + \sum\limits_{i=1}^{m+n-2} \beta_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i + \ \ +k+3/2\ r/s} \int_0^{\infty} G^{s+nr,\,4r}_{(m+n+2)r,\,2s+(m+n)r}$$

$$\left[\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle| \begin{matrix} \triangle(-b_i-\theta+1, r),\ \triangle(-\beta_j-\theta+1, r) \\ \triangle(+1/2, s),\ \triangle(-a_u-\theta+1, r),\ \triangle(-\alpha_v-\theta+1, r),\ \triangle\{(-v+1)/2, s\} \end{matrix}\right] .f(t)\, dt \qquad (2.3)$$

$$\theta = \lambda/2 + 3/4\ r/s + k/2$$

(यहाँ $i=1, \ldots, 4,\ j=1, \ldots, m+n-2,\ u=1, \ldots, n$ तथा $v=1, \ldots, m$) बशर्ते कि $|f(t)|$ का हैंकल परिवर्त तथा $|t^\lambda \phi(t^{r/s})|$ का ψ^n_m परिवर्त विद्यमान हो और (2.3) पूर्णतया अभिसारी हो ।

प्रमेय 2 : यदि

$$\phi(p) \underset{v}{\overset{J}{=}} f(t) \qquad (2.4)$$

तथा

$$\psi_m^n(p) \underset{n,m}{\overset{G}{=}} t^\lambda \phi(t^{-r/s}) \qquad (2.5)$$

तो $$\psi_m^n(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\frac{2^{\lambda-k-3/2\ r/s}}{p^{\lambda+1-3/2\ r/s}}.(2\pi)^{(1-r)(3-m)}$$

$$(r)^{\sum_{i=1}^{4} b_i+\sum_{i=1}^{m+n-2}\beta_i-\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\lambda+k-3/2\ r/s}\int_0^{\infty}G^{nr,s+4r}_{2s+(m+n+2)r}$$

$$\left[\left(\frac{2s}{t}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\begin{matrix}\triangle(3/2+\nu/2,s),\triangle(-b_i-\theta+1,r),\triangle(-\beta_j-\theta+1,r),\triangle(3/2-\nu/2,s)\\ \triangle(-a_u-\theta+1,r),\triangle(-\alpha_v-\theta+1,r)\end{matrix}\right].f(t)\,dt \qquad (2.6)$$

जहाँ $\theta=\lambda/2-k/2+3/4\ r/s$

(यहाँ $i=1,\ldots,4, j=1,\ldots m+n-2, u=1,\ldots,n$ तथा $v=1,m$)

बशर्ते कि $|ft|$ का हैंकल परिवर्त तथा $|t^{\lambda}\phi(t^{-r/s})|$ का $\psi^n{}_m$ परिवर्त विद्यमान हो और (2.6) परम अभिसारी हो।

प्रमेय 3 : यदि

$$\phi(p)\ \frac{K}{\overline{\nu}}f(t) \qquad (2.7)$$

तथा $$\psi_m^n(p)\ \frac{G}{\overline{m,n}}\ t^{\lambda}\phi(t^{-r/s}) \qquad (2.8)$$

तो $$\psi_m^n(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\frac{2^{\lambda-k-3/2\ r/s-1/2}}{p^{\lambda-3/2\ r/s+1}}.(2\pi)^{(1-r)(3-m+(1-s)}$$

$$(r)^{\sum_{i=1}^{4} b_i-\sum_{i=1}^{m+n-2}\beta_i-\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\lambda+k-3/2\ r/s}\int_0^{\infty}G^{nr,2s+4r}_{2s+(m+n+2)r,(m+n)r}$$

$$\left[\left(\frac{2s}{t}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\begin{matrix}\triangle(3/2+\nu/2,s),\triangle(-b_i-\theta+1,r),\triangle(-\beta_j-\theta+1,r),\triangle(3/2-\nu/2,s)\\ \triangle(-a_u-\theta+1,r),\triangle(-\alpha_v-\theta+1,r)\end{matrix}\right].f(t)\,dt \qquad (2.9)$$

$$\theta=\lambda/2+k/2-3/4\ r/s$$

(जहाँ $i=1,\ldots,4, j=1,\ldots,m+n-2, u=1,\ldots,n,$ तथा $v=1,\ldots,m$)

बशर्ते कि माइजर परिवर्त $|f(t)|$ विद्यमान हो तथा $|t^{\lambda}\phi(t^{-r/s})|$ के परिवर्त $\psi^n{}_m$ का अस्तित्व हो और (2.9) परम अभिसारी हो।

प्रमेय 4 : यदि

$$\phi(p) \underset{v}{\overset{K}{=\!=}} f(t) \tag{2.10}$$

तथा

$$\psi^{n}_{m}(p) \underset{n,\, m}{\overset{G}{=\!=}} t^{\lambda}\phi(t^{r/s}) \tag{2.11}$$

तो

$$\psi^{n}_{m}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{!k} \; \frac{2^{\lambda-k+3/2\; r/s-1/2}}{p^{\lambda+3/2\; r/s+1}} \cdot (2\pi)^{(1-r)(3-m)+(1-s)}$$

$$(r)^{\sum_{i=1}^{4} b_i + \sum_{i=1}^{m+n-2} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \lambda + k + 3/2\; r/s}$$

$$\int_0^{\infty} G^{2s+nr,\, 4r}_{(m+n+2)r,\, 2s+(m+n)r} \left| \left(\frac{t}{2s}\right)^{2s} \left(\frac{2r}{p}\right)^{2r} \right| \begin{matrix} \triangle(1/2+v/2,\, s) \\ \triangle(-b_i-\theta+1,\, r),\ \triangle(-\beta j-\theta+1,\, r),\ \triangle(1/2-v/2,\, s) \\ \triangle(-a_u-\theta+1,\, s),\ \triangle(-\alpha_v-\theta+1,\, s) \end{matrix} \Bigg] f(t) \tag{2.12}$$

$$\theta = \lambda/2 + k/2 + 3/4\; r/s$$

जहाँ $i=1, \ldots, 4, j=1, \ldots, m+n-2, u=1, \ldots, n$ तथा $v=1, \ldots, m$)

बशर्ते कि $|f(t)|$ का माइजर परिवर्त तथा $|t^{\lambda}\phi(t^{r/s})|$ का ψ^{n}_{m} परिवर्त विद्यमान हो और समीकरण (2.12) परम अभिसारी हो ।

प्रमेय 5 : यदि

$$\psi^{n}_{m}(p) \underset{n,\, m}{\overset{G}{=\!=}} f(t)$$

तथा

$$\phi(p) \underset{v}{\overset{J}{=\!=}} t^{\lambda}\, \psi^{n}_{m}(t^{r/s}),$$

तो

$$\phi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} \; \frac{2^{\lambda+k(r/s-2)+1/2}}{p^{\lambda+k\; r/s}} \cdot (2\pi)^{(i-s)(3-n)}$$

$$(r)^{\lambda+(kr/s)+\frac{1}{2}} (s)^{\sum_{i=1}^{4} b_i + \sum_{i=1}^{m+n-2} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i}$$

$$\int_0^\infty G^{4s,ns+r}_{(m+n)s+2r,(m+n+2)s}\left[\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\middle|\ \frac{a_1+k}{s},\ldots,\frac{a_n+k+s-1}{s}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta(\mp\nu/2-\lambda/2-k/2\ r/s+\frac{1}{4},r);\ \frac{\alpha_1+k}{s},\ldots,\frac{\alpha_m+k+s-1}{s}\\ \frac{b_1+k}{s},\ldots,\frac{b_4+k+s-1}{s};\ \frac{\beta_1+k}{s},\ldots,\frac{\beta_{m+n-2}+k+s-1}{s}\end{matrix}\right]f(t)\,dt$$

प्रमेय 6 : यदि

$$\psi^n_m(p)\,\frac{G}{\overline{\overline{n,m}}}\,f(t)$$

तथा $$\phi(p)\ \frac{J}{\overline{\overline{\nu}}}\ t^\lambda\ \psi^n_m(t^{-r/s})$$

तो $$\phi(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\,\frac{2^{\lambda-k(r/s+2)+1/2}}{p^{\lambda-k\ r/s}}.\ (2\pi)^{(1-s)(3-m)}$$

$$(r)^{\lambda-k\ r/s+\frac{1}{2}}_{(s)}\ \sum_{i=1}^{n}1-a_i+\sum_{i=1}^{m}1-\alpha_i-\sum_{i=1}^{4}1-b_i-\sum_{i=1}^{m+n-2}1-\beta_i+2$$

$$\int_0^\infty G^{sn,4s+r}_{2r+(m+n+2)s,(m+n)s}\left[\left(\frac{2s}{t}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\ \frac{1-b_i+k}{s},\ldots,\frac{k-b_4+s}{s};\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta(\mp\nu/2-\lambda/2+k/2\ r/s+k+\frac{1}{4},r);\frac{1-\beta_1+k}{s},\ldots,\frac{k+s-\beta_{m+n-2}}{s}\\ \frac{1-a_1}{s},\ldots,\frac{k-a_n+s}{s};\ \frac{1-\alpha_1+k}{s},\ldots,\frac{k-\alpha_m+s}{s}\end{matrix}\right]f(t)\,dt$$

प्रमेय 7 : यदि

$$\psi^n_m(p)\,\frac{G}{\overline{\overline{n,m}}}\,f(t)$$

तथा $$\phi(p)\ \frac{K}{\overline{\overline{\nu}}}\ t^\lambda\ \psi^n_m(t^{-r/s}),$$

तो $$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\,\frac{2^{\lambda-k(r/s+2)}}{p^{\lambda-k\ r/s}}\ (2\pi)^{(1-r)+(1-s)(3-m)}$$

$$(r)^{\lambda-k\, r/s+\frac{1}{2}}\,(s)^{\sum_{i=1}^{n} 1-a_i+\sum_{i=1}^{m} 1-\alpha_i-\sum_{i=1}^{4} 1-b_i-\sum_{i=1}^{m+n-2} 1-\beta_2+2}$$

$$\int_0^\infty G^{sn,4s+2r}_{2r+(m+n+2)s,(m+n)s}\left[\left(\frac{2s}{t}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\begin{array}{l}\frac{1-b_1+k}{s},\ldots,\frac{k-b_4+s}{s};\\ \triangle(\mp\nu/2-\lambda/2+k/2\, r/s+k+\frac{1}{4},r);\frac{1-\beta_1+k}{s},\ldots,\frac{k+s-\beta_{m+n-2}}{s}\\ \frac{1-a_1+k}{s},\ldots,\frac{k-a_n+s}{s};\frac{1-\alpha_1+k}{s},\ldots,\frac{k-\alpha_m+s}{s}\end{array}\right] f(t)\,dt$$

प्रमेय 8 : यदि

$$\psi^n_m(p)\,\frac{G}{n,\,m}\,f(t)$$

तथा

$$\phi(p)\,\frac{K}{\nu}\,t^{\lambda}\,\psi^n_m(t^{r/s})$$

तो

$$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\frac{2^{\lambda+k(r/s-2)}}{p^{\lambda+k(r/s)}}\cdot(2\pi)^{(1-r)+(1-s)(3-m)}$$

$$(r)^{\lambda+k\, r/s+\frac{1}{2}}\,(s)^{\sum_{i=1}^{4} b_i+\sum_{i=1}^{m+n-2}\beta_i-\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}$$

$$\int_0^\infty G^{4s,ns+2r}_{2r+(m+n)s,(m+n+2)s}\left[\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\begin{array}{l}\frac{a_1+k}{s},\ldots,\frac{a_n+k+s-1}{s};\\ \triangle\mp\nu/2-\lambda/2-\frac{k}{2}\,r/s+k+\frac{1}{4},r);\frac{\alpha_1+k}{s},\ldots,\frac{\alpha_m+k+s-1}{s}\\ \frac{b_1+k}{s},\ldots,\frac{b_4+k+s-1}{s};\frac{\beta_1+k}{s},\ldots,\frac{\beta_{m+n-2}+k+s-1}{s}\end{array}\right] f(t)\,dt$$

उपप्रमेयों को प्राप्त करने की विधि

प्रमेय 1 के लिये उपप्रमेयों को प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित योजना प्रस्तावित है। इसे अन्य प्रमेयों के लिये भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

उपप्रमेय 1 : यदि हम शर्मा[7] के परिणाम में निम्नलिखित मान रखें

$n=0$, $m=2$, $a_r=b_r$, जहाँ $r=1, 2, 3$ तथा $b_4=\frac{1}{4}\mu/2$, $\beta_1=\frac{1}{4}-\mu/2$,

तो समीकरण (2.2) हैंकेल परिवर्त बन जावेगा और प्रमेय का समीकरण (2.3) निम्नलिखित रूप धारण करेगा ।

$$\psi_3^0\left[x^\lambda\phi(x^{r/s}):p:\begin{matrix}b_1,b_2,b_3\\ b_1,b_2,b_3,\frac{1}{4}+\mu/2;\frac{1}{4}-\mu/2\end{matrix}\right]=\frac{2^{\lambda+3/2\ r/s}}{p^{\lambda+3/2\ r/s+1}}(r)^{\lambda+3/2\ r/s+1/2}$$

$$\int_0^\infty G_{2r,2s}^{s,r}\left[\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\middle|\begin{matrix}\triangle(-\mu/2-\lambda/2-\frac{3}{4}\ r/s-\frac{3}{4},r),\triangle(\mu/2-\lambda/2-\frac{3}{4}r/s+\frac{3}{4},r)\\ \triangle(\nu/2+\frac{1}{2},s),\triangle(-\nu/2+\frac{1}{2},s)\end{matrix}\right]\times f(t)\,dt.$$

उपप्रमेय 2 : जब हम

$$n=0,\ m=2,\ a_r=b_r\ \text{ जहाँ }\ r=1,2),\ b_3=\tfrac{1}{4}+\mu/2,\ b_4=\tfrac{1}{4}-\mu/2,$$

रखते हैं तो समीकरण (2.2) माइजर परिवर्त बन जाता है और समीकरण (2.3)

$$\psi_2^0\left[x^\lambda\phi(x^{r/s}):p:\begin{matrix}b_1,b_2\\ b_1,b_2,\frac{1}{4}+\mu/2,\frac{1}{4}-\mu/2\end{matrix}\right]=\frac{2^{\lambda+3/2\ r/s}}{p^{\lambda+3/2\ r/s+1}}(2\pi)^{(1-r)}$$

$$.(r)^{\lambda+3/2\ r/s+1/2}\int_0^\infty G_{2r,2s}^{s,2r}\left[\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\begin{matrix}\triangle(-\mu/2-\lambda/2\ \frac{3}{4}\ r/s+\frac{3}{4},r),\ \triangle(\mu/2-\lambda/2-\frac{3}{4}\ r/s+\frac{3}{4},r)\\ \triangle(\frac{1}{2}+\nu/2,s)\ \ \triangle(\frac{1}{2}-\nu/2,s)\end{matrix}\right]f(t)\,dt.$$

उपप्रमेय 3 : यदि हम $m=3$ तथा $n=0$ रखें, $a_r=b_r$, जहाँ $r=1, 2$,

$$a_3=-\mu/2-\tfrac{1}{4},\ b_3=\tfrac{1}{4}+\mu/2,\ b_4=\tfrac{1}{4}-\mu/2,\ \beta=-\tfrac{1}{4}-\mu/2,$$

तो समीकरण (2.2) टिश्मार्श[8] द्वारा परिभाषित γ-परिवर्त हो जाता है और समीकरण (2.3) होगा

$$\psi_m^0\left[x^\lambda\phi(x^{r/s}):p:\begin{matrix}b_1,b_2,-\mu/2-\frac{1}{4}\\ b_1,b_2,\frac{1}{4}+\mu/2,\frac{1}{4}-\mu/2;-\frac{1}{4}-\mu/2\end{matrix}\right]=\frac{2^{\lambda+3/2\ r/s}}{p^{\lambda+3/2\ r/s+1}}$$

$$.(r)^{1/2+\lambda+3/2\ r/s+1}\int_0^\infty G_{2r,2s}^{s,r}\left[\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\middle|\begin{matrix}\triangle(-\mu/2-\lambda/2-\frac{3}{4}\ r/s+\frac{3}{4},r),\ \triangle(\mu/2-\lambda/2-\frac{3}{4}\ r/s+\frac{3}{4},r)\\ \triangle(\nu/2+\frac{1}{2},s),\ \triangle(\frac{1}{2}-\nu/2,s)\end{matrix}\right]f(t)\,dt.$$

उपप्रमेय 4 : यदि हम

$$m=0,\ n=2,\ a_1=k/2+3/8,\ k/2+7/8=a_2,\ b_1=\rho/2+1/8,\ b_2=-\rho/2+1/8$$

लें, p के स्थान पर $2p$ रखें, $b_3=5/8+\rho/2$ तथा $b_4=5/8-\rho/2$

तो समीकरण (2.2) से वर्मा [9] के प्रथम कोटि के साथ एक सम्बन्ध प्राप्त होगा और समीकरण(2.3)निम्न रूप धारण करेगा

$$\psi_0^2\left[f(x):2p:\begin{matrix}k/2+3/8,\ k/2+7/8\\ \rho/2+1/8,\ -\rho/2+1/8,\ 5/8+\rho/2,\ 5/8,\ -\rho/2\end{matrix}\right]=\sum_{1=0}^{\infty}\frac{(-2)^1}{1!}$$

$$\cdot\frac{2^{\lambda+3/2\ r/s+1}}{(2p)^{\lambda+3/2\ r/s+1}}(2\pi)^3(r)^{\lambda+1+3/2\ r/s-k+1/4}\int_0^{\infty}G^{s+2r,4r}_{4r,2s+2r}$$

$$\left[\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\begin{matrix}\triangle(-\rho/2-\theta+7/8,\ r),\ \triangle(\rho/2-\theta+7/8,\ r),\ \triangle(-\rho/2-\theta+3/8,\ r),\\ \triangle(\nu/2-\frac{1}{2},\ s),\ \triangle(-k/2-\theta+5/8,\ r),\ \triangle(-k/2-\theta+1/8,\ r),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\triangle(\rho/2-\theta+3/8,\ r)\\ \triangle(-\nu/2-\frac{1}{2},\ s)\end{matrix}\right]f(t)\,dt$$

जहाँ $\theta=\lambda/2+3/4\ r/s+\frac{1}{2}$

उपप्रमेय 5 : यदि हम

$$m=2,\ n=0,\ a_1=\tfrac{1}{2}(\rho-k),\ a_2=\tfrac{1}{2}(\rho-k+1),\ b_1=\tfrac{1}{2}(\rho+\mu),\ b_2=(\rho+\mu+1),$$

$\frac{1}{2}(\rho-\mu)=b_3$ तथा $b_4=\frac{1}{2}(1+\rho-\mu)$ मान प्रदान करें तो समीकरण (2.2) ह्विटेकर फलन परिवर्त के साथ एक सम्बन्ध देगा और समीकरण (2.3) का रूप होगा

$$\psi_2^0\left[\frac{\phi(x)}{x^{\lambda}}^{r/s}:p:\begin{matrix}\frac{1}{2}(\rho-k),\ \frac{1}{2}(\rho-k+1)\\ \frac{1}{2}(\rho+\mu),\ \frac{1}{2}(1+\rho+\mu),\ \frac{1}{2}(\rho-\mu),\ \frac{1}{2}(1+\rho-\mu)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{2^{\lambda+3/2\ r/s}}{p^{\lambda+3/2\ r/s+1}}(r)^{\lambda+k+\rho+3/2\ r/s+1/2}\int_0^{\infty}G^{s,4r}_{4r,2s+2r}\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}$$

$$\triangle\left(-\frac{\rho+\mu}{2}-\lambda/2-\tfrac{3}{4}\ r/s+1,\ r\right),\triangle\left(-\frac{\rho-k}{2}-\lambda/2-\tfrac{3}{4}\ r/s+1,\ r\right),$$

$$\triangle(\nu/2+\tfrac{1}{2},\ s),\ \triangle\left(-\frac{\rho-k}{2}-\lambda/2-\tfrac{3}{4}\ r/s+1,\ r\right),\triangle\left(-\frac{\rho-k}{2}-\lambda/2-\tfrac{3}{4}\ r/s,+\tfrac{1}{2}r\right),$$

$$\triangle\left(-\frac{\rho+\mu}{2}-\lambda/2-\tfrac{3}{4}\ r/s+\tfrac{1}{2},\ r\right),\triangle\left(-\frac{\rho-\mu}{2}\lambda/2-\tfrac{3}{4}\ r/s+\tfrac{1}{2},\ r\right)$$

$$\triangle(-\nu/2+\tfrac{1}{2},\ s)\quad.\quad f(t)\,dt \tag{2.13}$$

जब हम $\rho=-k$, रखते हैं तो (2.2) माइजर के[5] ह्विटेकर फलन परिवर्त के साथ एक सम्बन्ध प्रदान करता है और तब समीकरण (2.3) से एक समीकरण प्राप्त होता है जिसमें $\rho=-k$ रखने पर यह (2.13) में समानीत हो जाता है।

यदि हम $\rho=\mu$ रखें तो समीकरण (2.2) वर्मा[9] के द्वितीय प्रकार के परिवर्त के साथ एक सम्बन्ध चित्रित करता है और समीकरण (2.3) एक ऐसे समीकरण में रूपान्तरित हो जाता है जिसे (2.13) में $\rho=\mu$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

उपप्रमेय 6 : यदि हम $m=2$ तथा $n=n-4$, रखें और p के स्थान पर $2p$ रखें,

$$a_{n-5}=\tfrac{1}{2}(a+m-c+\tfrac{1}{2}),\ a_{n-4}=\tfrac{1}{2}(a+m-c+3/2),\ a_{n-2}=b,$$

$$a_{n-2}=b_2,\ a_r=b_r \text{ रखें जहाँ } r=1, 2, \ldots n+6,\ b_{n-5}=b_1,\ b_{n-4}=b_2,$$

$$b_{n-3}=m/2-\tfrac{1}{4},\ b_{n-2}=m/2+\tfrac{1}{4},\ b_{n-1}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}(m-c),\ b_n=\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}(m-c),$$

तो बनर्जी परिवर्त[1] $\phi_1(p)$ के साथ समीकरण (2.2) का एक सम्बन्ध प्राप्त होगा और समीकरण (2.3) निम्नवत् होगा

$$\psi_2^{n-4}\left[\phi\ x^{\lambda}(x)^{r/s} : 2p : \begin{matrix} \tfrac{1}{2}(a+m-c+\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(a+m-c+3/2),\ a_1, \ldots, a_{n-6}, b_1, b_2 \\ b_1\ b_2,\ \tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{4},\ a_1, \ldots, a_{n-6},\ \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}(m-c),\ \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}(m-c) \end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{m} \frac{(4-n)^k}{k!} \frac{2^{\lambda+3/2\ r/s-k}}{(2p)^{\lambda+3/2\ r/s+1}} (2\pi)(r)^{\lambda+m+k-a+3/2\ r/s}$$

$$\int_0^\infty G^{s+(n-4)r,4r}_{nr,2s+(n-2)r}\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2^r}{2p}\right)^{2s}\left| \begin{matrix} \triangle(-m/2-\lambda/2-\tfrac{3}{4}\ r/s-k/2+5/4, r) \\ \triangle(\nu/2+\tfrac{1}{2}, s) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \triangle(-m/2+\theta+\tfrac{3}{4}, r),\ \triangle(-m/2+c/2-\theta+\tfrac{3}{4}, r)\,\triangle(-m/2-c/2-\theta+\tfrac{1}{4}, r) \\ \triangle(-a/2-m/2+c/2-\theta+\tfrac{3}{4}, r),\ (-a/2-m/2+c/2-\theta+5/8, r),\ \triangle(-\nu/2+\tfrac{1}{2}, s) \end{matrix}\right| f(t)dt$$

जहाँ

$$\theta=\lambda/2+k/2+\tfrac{3}{4}r/s.$$

उपप्रमेय 7 : यदि हम $m=0$ लें और p के स्थान पर $2p$, $a_r=\beta_r$ जहाँ $r=1, 2, \ldots, n-2$, $b_1=m/2+\tfrac{1}{4}$, $b_2=m/2-\tfrac{1}{4}$, $b_3=m/2-c/2+\tfrac{1}{4}$, $b_4=m/2-c/2+\tfrac{3}{4}$, $a_{n-1}=\tfrac{1}{4}+m/2-a/2$, $a_n=\tfrac{3}{4}+m/2-a/2$, तो समीकरण (2.2) से बनर्जी[1] परिवर्त $\phi_2(p)$ के साथ एक सम्बन्ध प्राप्त होगा और समीकरण (2.3) का रूप निम्बवत् होगा

$$\psi_0^n\left[\phi\ \underset{x^{\lambda}}{(x)}^{r/s} : 2p : \begin{matrix} \tfrac{1}{4}+m/2-a/2,\ \tfrac{3}{4}+m/2-a/2,\ a_1, \ldots, a_{n-2} \\ m/2+\tfrac{1}{4},\ m/2-\tfrac{1}{4},\ m/2-c/2+\tfrac{1}{4},\ m/2-c/2+\tfrac{3}{4},\ a_1, \ldots, a_{n-2} \end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\frac{2^{\lambda+3/2\, r/s-k}}{(2p)^{\lambda+3/2\, r/s+1}}(r)^{\lambda+a+m-c-k+3/2\, r/s}\int_0^{\infty}G^{s+nr,4r}_{(n+2)r,2s+nr}$$

$$\left(\frac{t}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{2p}\right)^{2r}\left|\begin{matrix}\triangle(-m/2-\theta+\frac{3}{4},r),\ \triangle(-m/2-\theta+5/4,r),\ \triangle(-m/2+c/2-\theta+\frac{3}{4},r),\\ \triangle(\nu/2+\frac{1}{2},s),\ \triangle(-m/2+a/2-\theta+\frac{3}{4},r),\ \triangle(-m/2-a/2-\theta+\frac{1}{4},r)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\triangle(-m/2+c/2-\theta+\frac{1}{4},r)\\ \triangle(-\nu/2+\frac{1}{2},s)\end{matrix}\right|f(t)dt$$

जहाँ $\theta=\lambda/2+k/2+\frac{3}{4}r/s$

प्रमेय 1 की उपपत्ति

(1.3) में (1.1) से $\phi(x^{r/s})$ का मान रखने, समाकलन का क्रम बदलने (जो कथित प्रतिबन्धों के के अन्तर्गत वैध है) $J_0(x)$ को $G^{1\,0}_{2\,0}(x^2/4|\,\lambda/2,-k/2)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने और सक्सेना[6] की विधि से आन्तरिक समाकल को समाकलित करने,

$$x^{\sigma}\,G^{mn}_{pq}\left(x\,\Big|\,{}^{a_r}_{b_s}\right)=G^{mn}_{pq}\left(x\,\Big|\,{}^{a_r+\sigma}_{b_s+\sigma}\right)$$

को व्यवहृत करने, सरल करने एवं पुनः माइजर के G-फलन की ज्ञात परिभाषा के आधार पर विवेचना करने पर तुरन्त ही (2.3) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होगा।

2, 3, 4 तथा 5-6 प्रमेयों की उपपत्ति इन्हीं पदचिह्नों पर प्राप्त की जाती है।

उदाहरण : माना

$$f(x)=x^{\rho}\exp\left(\frac{a^2x^2}{4}\right)K_{\mu}\left(\frac{a^2x^2}{4}\right),$$

$$Re\ a>0,\ -3/2-Re(\nu\pm2\mu)<Re\ \rho<0.$$

तो

$$\phi(p)=2^{\rho+1}(2\pi)^{-1/2}\cos(\mu\pi)(1/y)^{\rho}\,G^{2\,2}_{2\,3}\left(\frac{p^2}{2a^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\mu,\ 1+\mu\\ \frac{1}{4}+\rho/2+\nu/2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}+\rho/2-\nu/2\end{matrix}\right)$$

तो

$$\psi^{n}_{m}(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\frac{2^{\lambda-k+1-\rho(r/s-1)}}{p^{\lambda-\rho\, r/s+1}}(2\pi)^{(1-r)(3-m)+3/2(1-s)}$$

$$(r)^{\sum_{i=1}^{4}b_i+\sum_{i=1}^{m+n-2}\beta_i-\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\lambda+k-\rho\, r/s}\,(s)^{\rho-1/2}$$

$$G^{2s+nr,2s+4r}_{2s+(m+n)r,3s+(m+n+2)r}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\left(\frac{\frac{1}{2}}{sa^2}\right)^{s}\left|\begin{matrix}\frac{1-\mu}{s},\ldots,\\ \\ \frac{\frac{1}{4}+\rho/2+\nu/2}{s},\ldots,\end{matrix}\right.$$

$$\frac{1+\mu+s-1}{s},\ \triangle(-b_i-\theta+\tfrac{1}{2},r),\ \triangle(-\beta_j-\theta+\tfrac{1}{2},r)$$

$$\frac{\frac{1}{2}+s-1}{s},\ \triangle(-a_u-\theta+\tfrac{1}{2},r),\ \triangle(-\alpha_\nu-\theta+\tfrac{1}{2},r),\ \triangle(\tfrac{1}{4}+\rho/2-\nu/2,s)$$

जहाँ $i=1,\ldots,4,\ j=1,\ldots,m+n-2,\ u=1,\ldots,n,\ v=1,\ldots,m$

तथा $\theta=\lambda/2+k/2-\rho/2\ r/s.$

उदाहरण 2

यदि $f(x)=x^{\rho}H_{\mu}(ax)$

तो

$$\phi(p)=2^{\rho+1/2}\,p^{-\rho}\,G^{2\ 1}_{3\ 3}\left(\frac{p^2}{a^2}\left|\begin{matrix}\frac{1-\mu}{2},\ 1-\mu/2,\ 1+\mu/2\\ \\ \frac{3}{4}+\frac{\rho+\nu}{2},\ \frac{1-\mu}{2},\ \frac{3}{4}+\frac{\rho-\nu}{2}\end{matrix}\right.\right)$$

जहाँ

$$a>0,\ -5/2-Re\ \nu<Re(\rho+\mu)<0$$

तो

$$\psi^n_m(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\frac{2^{\lambda-k-\rho(r/s-1)-1/2}}{p^{-\lambda\rho\ r/s+1}}(2\pi)^{(1-r)(3-m)}$$

$$(s)^{\left(\frac{\rho+\mu+1}{2}\right)}(r)^{\sum_{i=1}^{4}b_i+\sum_{i=1}^{m+n-2}\beta_i-\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\lambda+k-\rho\ r/s}$$

$$G^{2s+nr,s+4r}_{3s+(m+n+2)r,s+4r}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\left(\frac{1}{a}\right)^{2s}\Bigg|$$

$$\triangle\left(\frac{1-\mu}{2},s\right),\ \triangle(-b_i-\theta+\tfrac{1}{2},r),\ \triangle(-\beta_j-\theta+\tfrac{1}{2},r),\ \frac{1-\mu/2}{s},\ldots,\ \frac{1+\mu/2+s-1}{s}$$

$$\frac{(\mu+\nu/2+\frac{3}{4})}{s},\ \frac{(1-\mu/2)}{s},,\ \triangle(-a_u-\theta+\tfrac{1}{2},r),\ \triangle(-\alpha_\nu-\theta+\tfrac{1}{2},r),\triangle\left(\frac{3}{4}+\frac{\rho-\nu}{2},s\right)$$

जहाँ

$$i=1,\ldots,4.\ j=1,\ldots,m+n-2,\ u=1,\ldots,n,\ v=1,\ldots,m$$

तथा

$$\theta=\lambda/2+k/2-\rho/2\ r/s.$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा०ए०एन० गोयल के आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. बनर्जी, डी०पी०, J. London Math. Soc. 1961, **36**, 433-435
2. एर्डेल्यी, इत्यादि, Table Integral Transform, भाग I, 1954
3. वही, Table of Integral Transforms, भाग II, 1954
4. वही, Higher Transcendental Functions, भाग I, 1954
5. माइजर, सी०एस०, Proc. Neder. Akad. V. Wet. 1946, **49**, 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175
6. सक्सेना, आर०के०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइन्स, इण्डिया,** 1960, **26**A(4)
7. शर्मा, के०सी०, Math. Zeitschr, 1965, **89**, 94-97
8. टिश्मार्श, ई०सी०, Theory of Fourier Integral, आक्सफोर्ड क्लैरेंडन, 1937
9. वर्मा, आर०एस०, Current Science, 1947, **16**, 17-18

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 1, January, 1982, Pages 97-105

बेंजीन, टॉल्युईन, p–जाइलीन, क्लोरोफॉर्म तथा कार्बन टेट्राक्लोराइड के साथ ट्राइक्लोरोएथिलीन के द्रव मिश्रणों का मोलर ध्वनि वेग और मोलर संपीड्यता

बी० पी० शुक्ल, वी० मिश्र तथा एस० एन० दूबे
नेशनल डिग्री कालेज, बड़हलगंज, गोरखपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 22, 1981]

सारांश

मोलर ध्वनि वेग R और मोलर संपीड्यता W ट्राइक्लोरोएथिलीन के साथ बेंजीन, टाल्युईन, p–ज़ाइलीन, कार्बन टेट्राक्लोराइड और क्लोरोफार्म के द्रव मिश्रणों के लिये 303.15K और 313.15K पर आगणित किये गये हैं। R और W के मान तापमान के प्रभाव से मुक्त नहीं हैं, जैसा कि राव और वाड़ा द्वारा दावा किया गया है। R और W के मानों में विचरण (Variations) द्रव मिश्रणों में बेंजीन वलय (Benzene ring) के साथ सम्बद्ध $-CH_3$ समूह की संख्या में वृद्धि के साथ प्रेक्षित किये गये हैं। C_2HCl_3 +क्लोरोफार्म और C_2HCl_3 +कार्बन टेट्राक्लोराइड के द्रव मिश्रणों के लिये R और W के मानों में अन्तर शायद पूर्ववर्त्ती दशा में हाइड्रोजन बन्धता (Hydrogen bonding) और उत्तरवर्त्ती दशा में $\sigma-\pi$ परस्पर क्रिया के कारण है।

Abstract

Molar sound velocity and molar compressibility of mixtures of trichloroethylene with benzene, toluene, p-xylene, chloroform and carbon tetrachloride. *By* B. P. Shukla, V. Misra and S. N. Dube, National Degree College, Barhalganj, Gorakhpur.

The molar sound velocity R and molar compressibility W have been calculated for the liquid mixtures of trichloroethylene with benzene, toluene, p—xylene, carbon tetrachloride and chloroform at 303·15K and 313.15K. The values of R and W are not independent of temperature as claimed by Rao and Woda. The variation in the values of R and W have been observed in the liquid mixtures with increase in the number of $-CH_3$ group attached to the benzene ring. The difference in the values of R and W for the liquid mixtures of C_2HCl_3+chloroform and C_2HCl_3+carbon tetrachloride is

perhaps due to hydrogen bonding in the former case and $\sigma-\pi$ interaction in the latter case.

बेंजीन, टॉल्युईन, p-ज़ाइलीन, क्लोरोफार्म और टेट्राक्लोराइड के द्रव मिश्रणों का अध्ययन विशेष दिलचस्पी का विषय है। क्योंकि C_2HCl_3 में तीन क्लोरीन परमाणुओं और एक π-इलेक्ट्रॉन व्यवस्था के कारण, यह एरोमेटिक यौगिकों के प्रति σ- और π- प्रकार के इलेक्ट्रॉन स्वीकारक और क्लोरोफॉर्म तथा CCl_4 के प्रति π- प्रकार के इलेक्ट्रॉन दाता के रूप में दोनों ही प्रकार से कार्य कर सकता है। ऐसी व्यवस्थाओं के अवयवों के बीच परस्पर क्रियाओं का व्यापक अध्ययन **नाथ** और **दूबे**[1] द्वारा किया गया है। चूँकि मोलर ध्वनि वेग (R) और मोलर संपीड्यता (W) द्रव मिश्रणों में आणविक परस्पर क्रियाओं के अध्ययन में अधिकाधिक ध्यान आकर्षित करते जा रहे हैं, अतः हमने उपर्युक्त व्यवस्थाओं के अवयवों के बीच आणविक परस्पर क्रियाओं के और आगे अध्ययन के लिए इन स्थिरांकों की गणनायें की हैं।

आणविक ध्वनि वेग (R), पराध्वनिक वेग (ultrasonic velocity) U और मोलर आयतन V_m सेनिम्नलिखित समीकरण द्वारा सम्बन्धित है।

$$V_m U^{1/3} = R \tag{1}$$

आणविक ध्वनि वेग (R) '**राव**[2] के स्थिरांक' के नाम से भी जाना जाता है। दूसरी ओर, मोलर संपीड्यता, W, **वाडा**[3] द्वारा

$$W = V_m \beta_s^{-1/7} \tag{2}$$

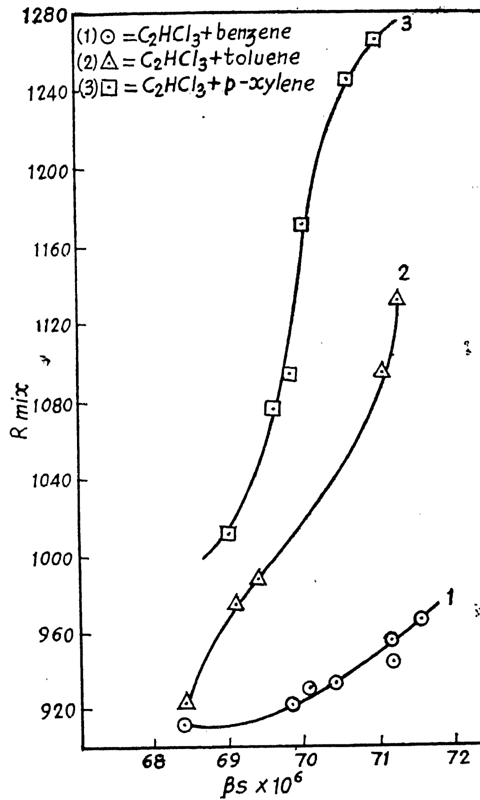
के रूप में परिभाषित की गयी जहाँ β_s रुद्धोष्म संपीड्यता (adiabatic compressibility) है। R और W के मान प्रत्येक द्रव के लिये (अत्यन्त संगुणित द्रवों को छोड़कर) तापमान और दाब से मुक्त हैं और अणुओं के संघटनकारी तत्वों के सन्दर्भ में योगशीलता नियमों (additivity rules) को तुष्ट करते हैं। अधिकतर द्रव मिश्रणों और विलयनों के लिए, ये मान द्रवों के अवयवों के मोल अंशों (mole fractions) और विलयनों के सान्द्रण पर लगभग एक रेखीय निर्भरता दर्शाते हैं। वर्त्तमान शोधकार्य में, β_s के मान और मिश्रणों के मोल आयतन हमारे[1,4] द्वारा लिये गये परिमापनों पर आधारित हैं।

परिणाम तथा विवेचना

मोलर ध्वनि वेग R और मोलर संपीड्यता W के मान क्रमशः समीकरण (1) और (2) से आगणित किये गये हैं जिनके लिये **नाथ** और **दूबे**[1] द्वारा दिये गये पराध्वनिक वेग और रुद्धोष्म संपीड्यता के आँकड़े काम में लाये गये हैं, तथा R और W के ये मान 303.15K और 313·15K पर सारणी 1 में अभिलेखित हैं। सारणी 1 दर्शाती है कि W का मान C_2HCl_3+बेंजीन व्यवस्था की स्थिति में ट्राइक्लोरो-एथिलीन का सान्द्रण बढ़ने के साथ बढ़ता है। C_2HCl_3+ टॉल्युईन और C_2HCl_3+p-जाइलीन व्यव-स्थाओं की स्थिति में W का मान ट्राइक्लोरोएथिलीन के मोल-अंश में वृद्धि के साथ घटता है। यह घटोतरी C_2HCl_3+p—ज़ाइलीन व्यवस्था की स्थिति में, C_2HCl_3+टॉल्युईन की स्थिति की अपेक्षा अधिक स्पष्ट होती है। जब हम W के मोल अंशों के साथ विचरण (variation) की जाँच करते हैं तो हमें हैलोमेथेनों

के साथ C_2HCl_3 की व्यवस्थाओं में विभिन्न विचरण दिखाई देते हैं। C_2HCl_3+ क्लोरोफार्म की स्थिति में हम W के मानों में बढ़ोतरी पाते हैं जबकि $C_2HCl_3+CCl_4$ व्यवस्था की स्थिति में W के मानों में ट्राइक्लोरोएथिलीन के मोल-अंशों के साथ एक घटोतरी देखी जाती है। W के 313·15K पर मान 303·15K पर उनके मानों से कम हैं, लेकिन W की मोल अंश के साथ विचरण की प्रवृत्ति दोनों तापमानों पर एक ही है।

चित्र 1 में, मिश्रणों के 313.15K पर मोलर ध्वनि वेग के मान C_2HCl_3+ बेंजीन, C_2HCl_3+ टॉल्युईन और C_2HCl_3+p-ज़ाइलीन की तीन स्थितियों में रुद्धोष्म संपीड्यता (adiabatic compressibility) के विरुद्ध लेखाचित्रित किये गये हैं। इन तीनों स्थितियों में तीन भिन्न प्रकार के वक्र प्राप्त होते हैं। वक्र 1 दर्शाता है कि विचरण मन्द है और वक्र 3 दर्शाता है कि यह विचरण बहुत तीव्र है। वक्र 2, जो

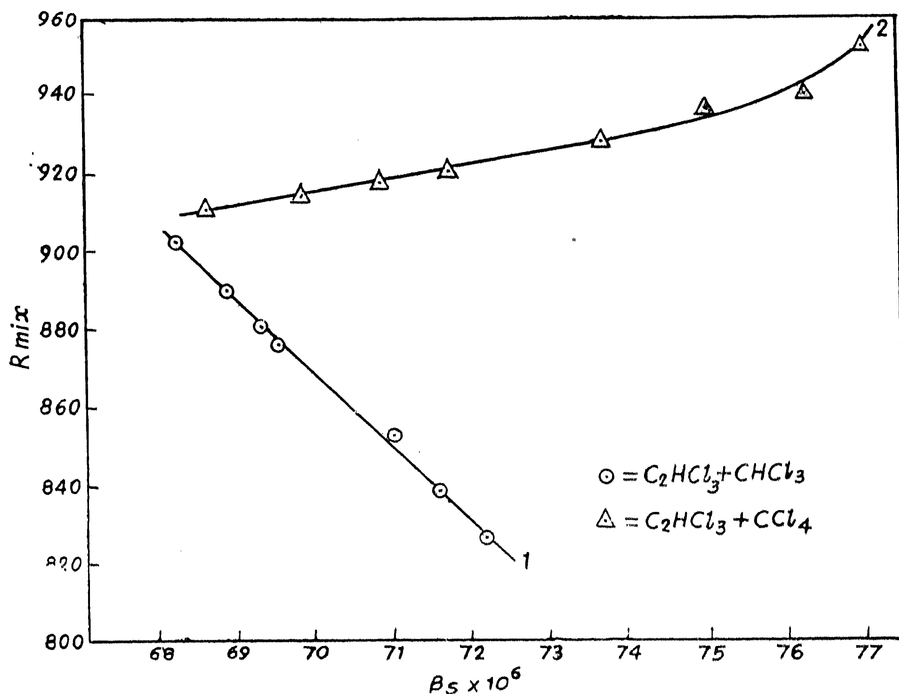


चित्र 1 : 313.15K पर मोलर ध्वनिवेग के विरुद्ध रुद्धोष्म संपीड्यता

C_2HCl_3+ टॉल्युईन व्यवस्था के लिये R_{mix} के β_s के साथ विचरण प्रदर्शित करता है, दोनों वक्रों की बीच की दशा में है। इन तीनों वक्रों की प्रकृति और W की C_2HCl_3 के मोल अंश के साथ विचरण संकेतित करते हैं कि C_2HCl_3 और एरोमेटिक यौगिकों के बीच परस्पर क्रिया की प्रबलता, जैसे ही हम बेंजीन से

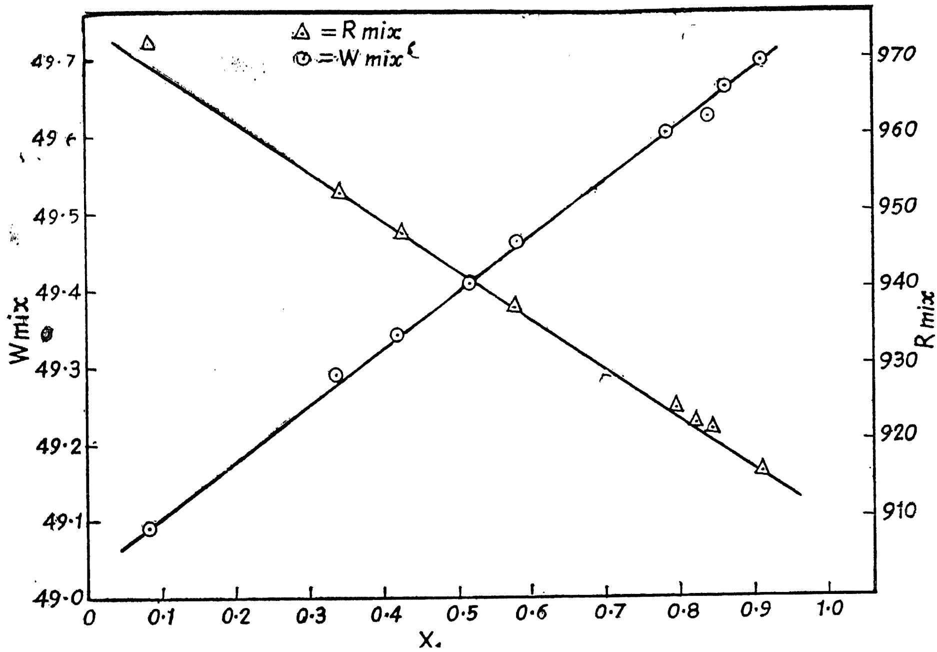
p-ज़ाइलीन की ओर अग्रसर होते हैं, बढ़ती जाती है। इसका कारण यह है कि जैसे ही बेंजीन वलय (benzene ring) से सम्बद्ध —CH_3 समूह की संख्या बढ़ती है, π–इलेक्ट्रॉनों की उपलब्धता की स्थिति भी बढ़ती जाती है जो C_2HCl_3 के प्रति π–प्रकार के त्यागशील इलेक्ट्रॉन प्रदाता की भाँति कार्य करेगा। C_2HCl_3 अणु, इसके 3 Cl परमाणुओं के एथिलीनिक संयोजकता से सीधे जुड़े होने से, इसके कम हो गये इलेक्ट्रॉन घनत्व के कारण, π- प्रकार के त्यागशील इलेक्ट्रॉन स्वीकारक की भाँति कार्य करेगा।

चित्र 2 में, R_{mix} के विचरण को मोल-अंश के विरुद्ध लेखाचित्रित किया गया है। C_2HCl_3+ क्लोरोफार्म व्यवस्था की स्थिति में R_{mix} का मान β_s के मान में वृद्धि के साथ घटता है जबकि C_2HC_3l+ CCl_4 व्यवस्था की स्थिति में R_{mix} का मान β_s के मान की वृद्धि के साथ मन्दतः बढ़ता है। R_{mix} का β_s के साथ यह विचरण तथा W का मोल-अंश के साथ $C_2HCl_3+CHCl_3$ व्यवस्था की स्थिति में विचरण यह संकेत देते हैं कि वहाँ $CHCl_3$ के H परमाणु और C_2HCl_3 के π-इलेक्ट्रॉन के बीच हाइड्रोजन-बन्धता (Hydrogen bonding) के निर्माण की संभावना है, जबकि C_2HCl_3 अणु CCl_4 के साथ अपनी परस्पर क्रिया में CCl_4 के प्रति एक π-प्रकार के त्यागशील इलेक्ट्रॉन दाता के रूप में कार्य करेगा, तथा CCl_4 एक σ- प्रकार के इलेक्ट्रॉन स्वीकारक के रूप में कार्य करेगा।

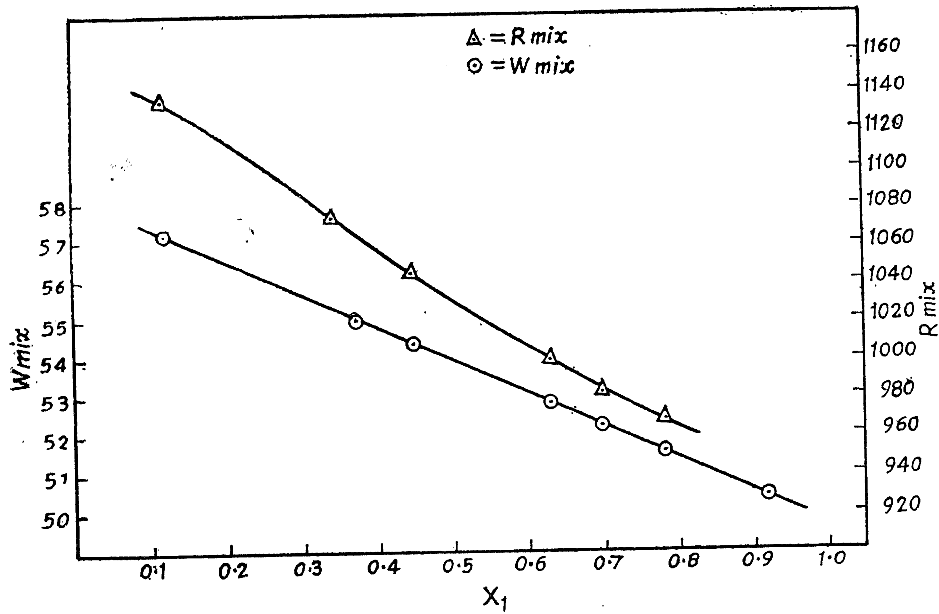


चित्र 2 : मोलरध्वनि वेग के विपक्ष रुद्धोष्म संपीड्यता

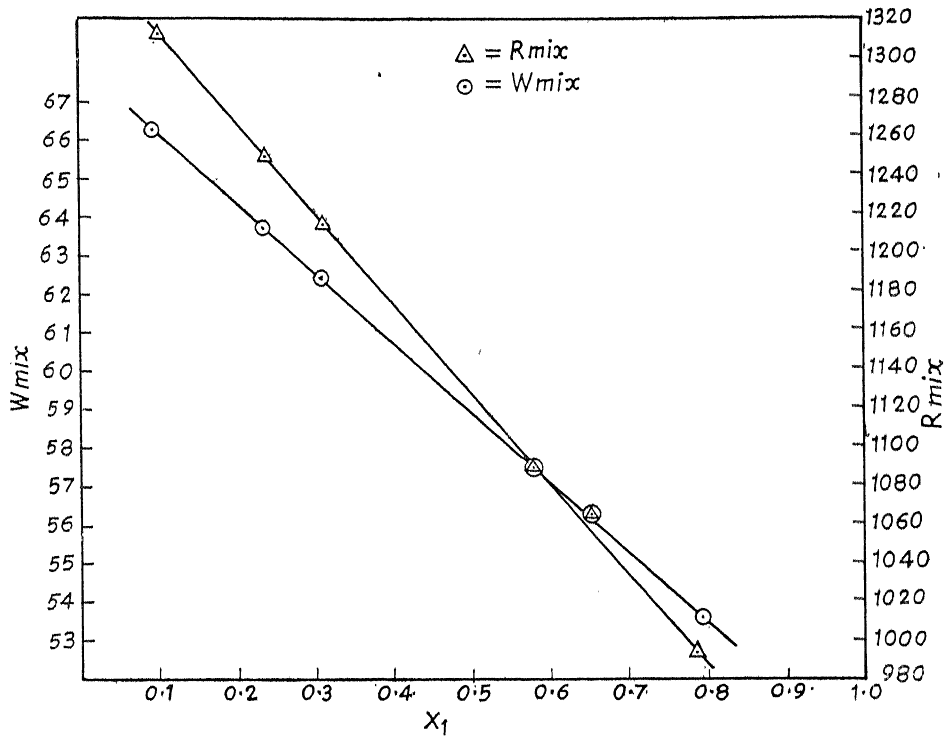
चित्र 3 से 7 तक में, मोलर ध्वनि वेग R और मोलर संपीड्यता W, 313·15K पर अध्ययन किये गये पाँच द्विवर्णी मिश्रणों (binary mixtures) के लिये ट्राइक्लोरो एथिलीन के मोल अंश के विरुद्ध लेखा-



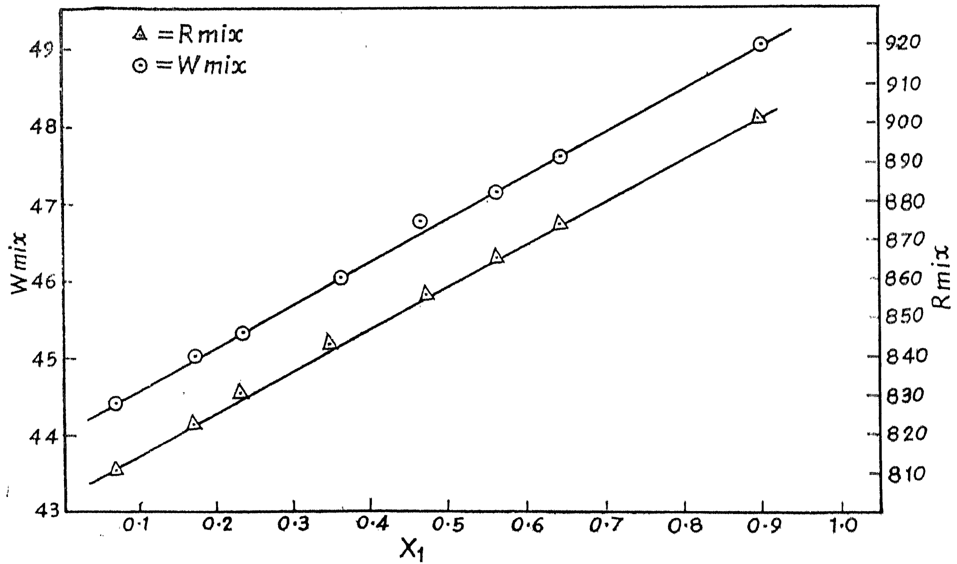
चित्र 3 : 313.15K पर C_2HCl_2+ बेंजीन व्यवस्था के लिए We R के विपक्ष X_1 के आलेख



चित्र 4 : 313.15K पर C_2HCl_3+ टोलुईन व्यवस्था के लिए We R के विपक्ष X_1 के आलेख



चित्र 5 : 313.15K पर C_2HCl_3+p-ज़ाइलीन व्यवथा के विए We R के विपक्ष X_1 के आलेख



चित्र 6 : 31 3.5K पर C_2HCl_3+क्लोरोफार्म व्यवस्था के लिए WeR के विपक्ष X_1 का आलेख

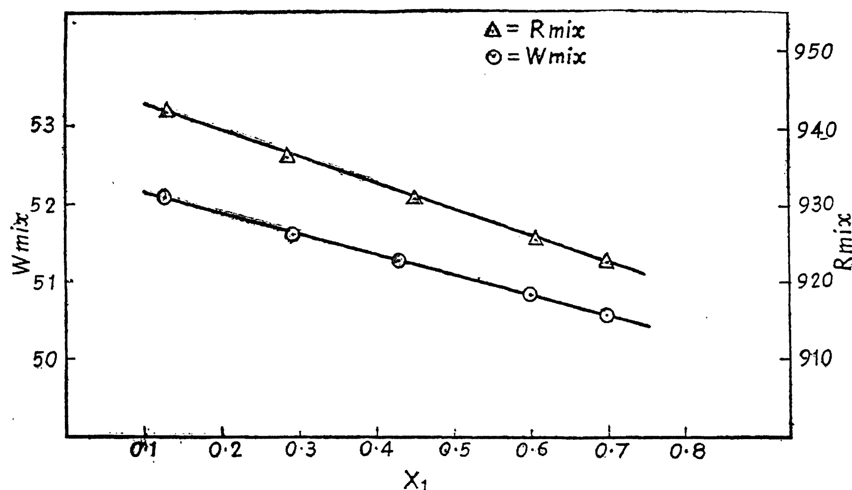
सारणी 1

अध्ययन की गयी द्विवर्णी व्यवस्थाओं के मोलर ध्वनि वेग (R) और मोलर संपीड्यता (W) के मान

तापमान 303.15 K			तापमान 313.15 K		
x_1	R	10^6 W, atm^{-1}	x_1	R	10^6 W, atm^{-1}
		C_2HCl_3+बेंजीन			
0.1112	966.1000	48.9610	0.0875	971.4972	49.0875
0.2565	955.0478	49.0888	0.3354	952.1703	49.2814
			0.4154	946.6031	49.3368
0.3679	946.2298	49.1349	0.5118	940.0990	49.4002
0.5456	934.4598	49.2641	0.5749	936.6332	49.4579
0.6064	930.7973	49.3055	0.7774	924.7045	49.5858
0.7435	922.9846	49.3971	0.8277	922.0379	49.6211
0.9450	912.1155	49.5184	0.8373	922.0082	49.6587
			0.9023	918.6034	49.6933
		C_2HCl_3+टॉल्युईन			
0.1256	1131.8477	57.1718	0.1150	1135.3769	57.3622
			0.3687	1067.2200	55.1468
0.2537	1095.7291	56.0711	0.4496	1046.1197	54.9571
0.6721	987.6113	52.4017	0.6287	1001.2171	52.9077
0.7233	975.1513	51.9635	0.7035	983.5381	52.2956
0.9395	923.0249	50.0590	0.7781	965.9010	51.6656
			0.9184	933.2353	50.4870

			C_2HCl_3 + *p*-ज़ाइलीन		
0.2137	1253.7788	63.7472	0.0944	1312.4204	66.0226
0.2299	1247.3763	63.4960	0.2292	1249.1259	63.5649
0.3990	1169.8103	60.4148	0.3081	1212.9088	62.1412
0.5717	1091.1558	57.2332	0.5761	1093.1123	57.3114
0.6011	1078.8329	56.7106	0.6459	1062.7485	56.0586
0.7598	1010.0890	53.8487	0.7934	998.9998	53.3969
			C_2HCl_3 + क्लोरोफॉर्म		
0.2299	827.4102	45.2194	0 0741	810.8628	44.4153
0.3399	839.0862	45.8371	0.1725	822.8725	45.0081
0.4665	852.3848	46.5374	0.2346	829.6447	45.3305
0.6863	876.3072	47.8003	0.3579	843.1500	46.0366
0.7221	879.9603	47.9950	0.4716	855.6875	46.6969
0.8367	890.1390	48.6255	0.5614	865.2625	47.2070
0.9303	902.3249	49.1703	0.6378	874.0267	47.6583
			0.8952	902.4456	49.1533
			C_2HCl_3 + CCl_4		
0.1343	940.4608	52.0072	0.1251	942.2630	52.1099
0.2258	936.6370	52.0911	0.2910	936.3078	51.6699
0.3196	933.7750	51.4876	0.4296	930.7368	51.4751
0.4385	929.6584	51.1611	0.6082	926.0431	50.7963
0.6352	922.2139	50.5871	0.7003	923.4377	50.5611
0.7258	918.9738	50.3214			
0.8319	915.0798	50.0123			
0.9439	912.1338	49.7494			

चित्रित किये गये हैं। चित्र 1 का अध्ययन दर्शाता है कि R के मान C_2HCl_3+ बेंजीन व्यवस्था के लिए मोल अंश के साथ घटते हैं जबकि W के मान बढ़ते हैं। परन्तु C_2HCl_3+टॉल्युईन और C_2HCl_3+p-ज़ाइलीन व्यवस्थाओं के लिए R और W दोनों के मान ट्राइक्लोरोएथिलीन के सान्द्रण बढ़ने के साथ घटते हैं। यह घटोतरी C_2HCl_3+p-ज़ाइलीन व्यवस्था के सन्दर्भ में अपेक्षाकृत अधिक सुस्पष्ट होती है। यह प्रवृत्ति बेंजीन नाभिक में $-CH_3$ समूह की संख्या में वृद्धि के साथ π-इलेक्ट्रॉनों की उपलब्धता की स्थिति के आधार पर पुन: स्पष्ट की जा सकती है। चित्र 6 से 7 तक यह स्पष्ट है कि C_2HCl_3+ क्लोरोफॉर्म व्यवस्था के लिए, R और W दोनों के मान C_2HCl_3 के सान्द्रण में वृद्धि के साथ बढ़ते हैं, जबकि C_2HCl_3+कार्बनटेट्राक्लोराइड व्यवस्था की स्थिति में ये दोनों मान C_2HCl_3 के सान्द्रण के साथ घटते हैं। $C_2HCl_3+CCl_4$ व्यवस्था की तुलना में C_2HCl_3+ क्लोरोफॉर्म व्यवस्था की स्थिति में यह वर्द्धनशील प्रवृत्ति पिछली स्थिति में सम्भावित हाइड्रोजन-बन्धता के कारण हो सकती है।



चित्र 7 : 313.5K पर $C_2HCl_3+CCl_4$ व्यवस्था के लिए We R के विपक्ष X_1 के आलेख

निर्देश

1. जगन नाथ तथा दूबे, एस० एन०, **जर्न० फिजि० केमि०**, 1980, **84**, 2166

2. राव, एम० आर०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1941, **9**, 682

3. वाडा, वाई०, **जर्न० फिजि० सोसा०**, जापान 1949, **4**, 280

4. जगन नाथ तथा दूबे, एस० एन०, **जर्न० केमि० थर्मोडायनेमिक्स**, 1979, **11**, 1163

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देान अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेगें।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 25 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

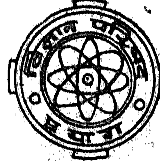
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.



संशोधित मूल्य

वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 12 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 1·5 पौंड या 4 डालर

Revised Rates

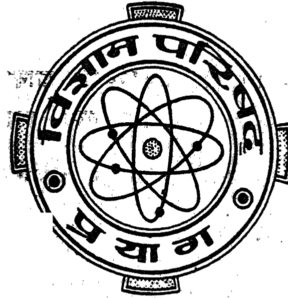
Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 12
Per Vol. Rs. 3 *or* 1·5 *or* $ 4

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7. बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
82229

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika
विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 25 April 1982 No. 2



The Research Journal of the Hindi Science Academy
Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India

विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982 Pages, 107-115

तारपीन (माँनटन मोम)-जल पायसों की श्यानता तथा कण-परिमाण वितरण पर कालप्रभावन का प्रभाव

महेश कुमार शर्मा
यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून

[प्राप्त—अक्टूबर 26, 1981]

सारांश

पॉलिऑक्सीएथिलीन सॉर्बिटन मोनोस्टिएरेट द्वारा स्थायीकृत तारपीन (मॉनटन मोम)-जल पायसों की श्यानता तथा कण-परिमाण पर कालप्रभावन का प्रभाव 30° सें० पर अध्ययन किया गया है। कालप्रभावन द्वारा मोम पायसों के कण-परिमाण वितरण वक्र रेखाओं की आकृति, ऊँचाई तथा चौड़ाई में परिवर्तन होता है। पायसों की असमांगता कालप्रभावन समय के अनुसार बढ़ती है। मोम पायसों के कालप्रभावन से, माध्य कण-परिमाण (D_m) में प्रगामी वृद्धि, श्यानता की कमी पर मेय प्रभाव डालती है। D_m का कालप्रभावित पायसों की श्यानता पर प्रभाव, उसी संघटन के नवनिर्मित पायसों की श्यानता के प्रभाव के समान ही होता है। D_m की वृद्धि दर तथा नये मोम पायसों के लिये श्यानता-कण परिमाण सम्बन्ध ज्ञात कर लिये जाते हैं और इन आँकड़ों से दीर्घकालीन कालप्रभावन के लिये श्यानता में परिवर्तन की पूर्वसूचना दी जा सकती है।

Abstract

On the aging of turpentine (montan wax)-in-water emulsions as function of viscosity and particle size distribution. *By* M. K. Sharma, Instruments Research and Development Establishment, Dehradun 248008

The influence of aging on the viscosity and particle size distribution of turpentine (montan wax)-in-water wax emulsions, stabilized with polyoxyethylene sorbitan monostearate, has been studied at 30°C. There is variation in the shape, height and width of the particle size distribution curves of the wax emulsions on aging. The inhomogeneity of the emulsions increases with aging time. On aging, the progressive increase in the mean particle size (D*m*) exerts a measurable effect on

the fall in viscosity of wax emulsions. Dm exerts the same influence on the viscosity of aged emulsions as on the viscosity of freshly prepared emulsions of the same composition. The rate of increase in Dm and the viscosity-particle size relationship for fresh wax emulsions are determined and from these data viscosity changes over longer aging periods can be predicted.

जब पायसों को कालप्रभावित किया जाता है, तो पूर्णतः पृथक् होने से पहले, परिक्षिप्त प्रावस्था की परिक्षेपण मात्रा में काफी परिवर्तन दिखाई पड़ता है। इस विषय सम्बन्धी ज्ञान के संचयित आँकड़े निम्नलिखित घटना-चक्र दर्शाते हैं : कण ऊर्णन से पुंजों का बनना, संतत प्रावस्था की फिल्म के विरलन से पुंजों के भीतर निकटवर्ती कणों का पृथक्करण, रोधिका ऊर्जा का अतिक्रमण और अन्त में कण संलयन। इस प्रकार कालप्रभावन अवधि में पायसों के कण-परिमाण वितरण तथा प्रवाह गुणों में परिवर्तन होते हैं।

मोम पायस के पिछले कार्यों के क्रम में[1,2], प्रस्तुत अन्वेषण में तारपीन (मॉनटन मोम) तथा जल–दो प्रावस्थाओं और पॉलिऑक्सीएथिलीन सॉर्बिटन मोनोस्टिएरेट–अनायनिक पायसीकारक द्वारा निर्मित मोम पायसों के कण-परिमाण वितरण तथा श्यानता पर कालप्रभावन के प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

पायसों का निर्माण :—मोम पायसों के निर्माण में तारपीन (मॉनटन मोम) तथा जल दो प्रावस्थाओं के रूप में और पॉलिऑक्सीएथिलीन सॉर्बिटन मोनो-स्टिएरेट (ट्वीन 60; के०एल०) पायसीकारक के रूप में उपयोग किये गये। अनायनिक पृष्ठ सक्रियक का 2% सान्द्रण (पायस का *w/v*%) इस्तेमाल में लाया गया। तारपीन (30° सें० पर आपेक्षिक घनत्व 0.814) में मॉनटन मोम (दक्षिण आरकाट, तमिलनाडु; गलनांक 84°±2° सें०) के 2% घोल का आयतन प्रभाज 0.1 से 0.65 तक बदला गया। पायसों की अंतिम निर्मिति में तारपीन में मॉनटन मोम, जल तथा अनायनिक पृष्ठ सक्रियक के विषमांगी मिश्रण का ब्रौन इमल्सेटर की सहायता से पायसीकरण किया गया। प्रत्येक पायस को बनाने में, पायसीकरण का समय (5 मिनट) और ताप (30° सें०) एकसमान रखा गया।

मोम पायसों के कालप्रभावन के दौरान, विभिन्न काल-अंतरालों पर कण-परिमाण वितरण तथा श्यानता के मान ज्ञात किये गये। मोम पायसों का काल प्रभावन 30° सें० पर डाटदार बोतलों में कई सप्ताह तक किया गया।

कण-परिमाण विश्लेषण :—जले-तैलम् मोम पायसों का कण-परिमाण विश्लेषण सूक्ष्मदर्शीय फोटोग्राफी विधि द्वारा किया गया[3]। इस फोटोग्राफी विधि में पायसों के माइक्रोस्कोपिक स्लाइडों के फोटोमाइक्रोग्राफ एक संलग्न कैमरा से युक्त कार्ल ज़ाइस जेना माइक्रोस्कोप की सहायता से 25× प्रकाशकीय व्यवस्था तथा 40× अभिदृश्यक को उपयोग करके ओखो, एन पी 27, 400 ए एस ए कर्तन फ़िल्मों पर लिये गये। माध्य आयतन बिन्दुक व्यास (D_m) की गणना, पिछले कार्य[4] में वर्णित विधि द्वारा की गई।

श्यानता-मापन :—मोम पायसों की श्यानता ज्ञात करने के लिये एक वाइज़ेनबर्ग रीओगोनिओ-मीटर, मॉडेल $R.16$ (सैन्गामो वेस्टन, बोग्नर रेगिस, इंग्लैंड) उपयोग में लाया गया[5]। उच्च अपरूपक गति (1467.6 सेकन्ड$^{-1}$) इस्तेमाल में लाई गई। शंकु व्यास तथा शंकु कोण क्रमशः 7.5 सेंमी० और $1°32'$ लिये गये। पायस के सम्पूर्ण भाग को एकसमान अपरूपक बल प्रदान करने के लिये छोटा शंकु कोण लिया गया। एक जल जैकेट की सहायता से ताप को $30°\pm0.1°$ सें० पर स्थिर रखा गया और सब पायसों को श्यानता ज्ञात करने से पहले, शंकु तथा प्लेट के मध्य आधे घंटे तक रखा गया ताकि वे इस स्थिर ताप को प्राप्त कर लें।

मोम पायसों की कालप्रभावन अवधि में, आपेक्षिक श्यानता, $\eta_{rel}(\eta_{rel}=\eta_{\infty}/\eta_{o}$, जहाँ η_{∞} अपरूपण की उच्च दर पर श्यानता है और इस पर अपरूपण दर का प्रभाव नहीं पड़ता है तथा η_{o} संतत प्रावस्था श्यानता है) ज्ञात की गई है।

परिणाम तथा विवेचना

मोम पायसों के कण-परिमाण वितरण पर कालप्रभावन का प्रभाव ज्ञात करने के लिये, कण-परिमाण वितरण आँकड़ों को एक असमांगता घटक के रूप में संक्षिप्त किया गया है। असमांगता, I, को निम्न समीकरण द्वारा दर्शाया जा सकता है[6]

$$I=\frac{\int_{0}^{\infty}(D-D_n)^2 n_1 dl}{\int_{0}^{\infty} n_1 dl} \qquad (1)$$

जहाँ D, बिन्दुक व्यास है, D_n संख्या औसत व्यास $(\Sigma nD/\Sigma n)_1$ और n_1 व्यास के अनुसार बिन्दुकों की संख्या की परिवर्तन दर है।

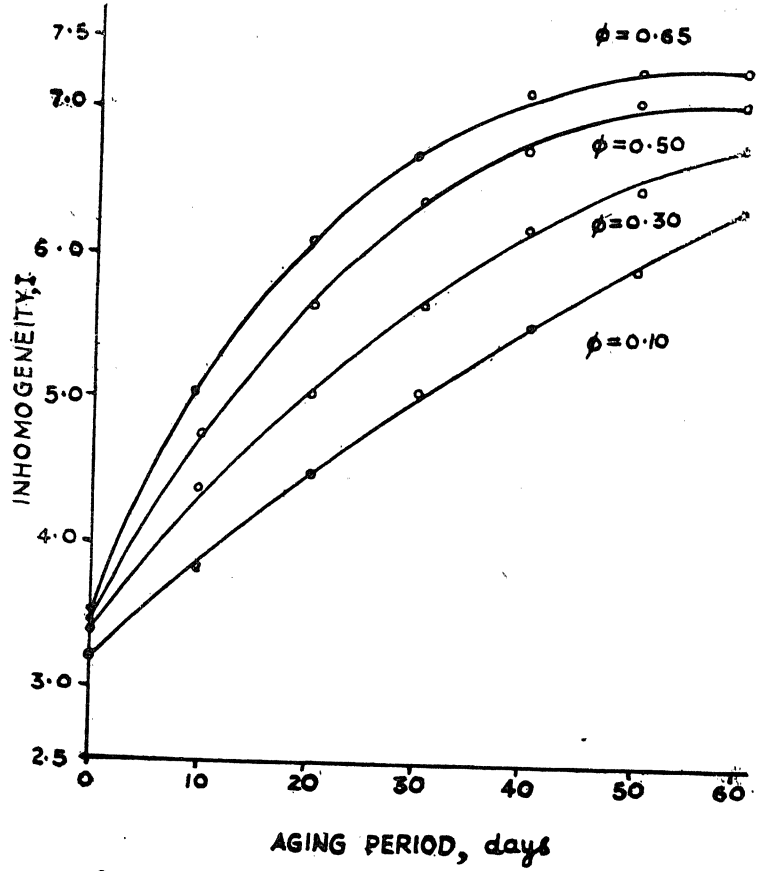
विस्तारित करने पर समीकरण (1) निम्न रूप धारण करता है

$$I=a_n/\pi-Dn^2 \qquad (2)$$

जहाँ a_n संख्या औसत क्षेत्रफल $(\Sigma na/\Sigma n)$ है। I के मान की गणना सभी नये तथा कालप्रभावित पायसों के लिये की गई।

विभिन्न परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सांद्रताओं (ϕ) तथा 2.0% ट्वीन 60 सान्द्रण द्वारा निर्मित मोम पायसों की असंमागता पर दिवसों में कालप्रभावन अवधि का प्रभाव चित्र (1) में दिखाया गया है। पायसों के का मान बढ़ने पर असंमागता में वृद्धि होती है। वक्रों से ज्ञात होता है कि कालप्रभावन से पायसों की असमांगता बढ़ती है।

चित्र (2) में 0.5 परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सान्द्रता तथा 2.0% पृष्ठ सक्रियक सान्द्रण से निर्मित एक प्रारूपिक तारपीन (मॉनटन मोम)-जल पायस के कण-परिमाण वितरण आँकड़ों पर काल-प्रभावन का प्रभाव दर्शाया गया है। कालप्रभावन द्वारा पायस के कण-परिमाण वितरण वक्रों की तुलना



चित्र 1. विभिन्न परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन सान्द्रताओं पर, मोम पायसों की असमांगता में परिवर्तन की दर

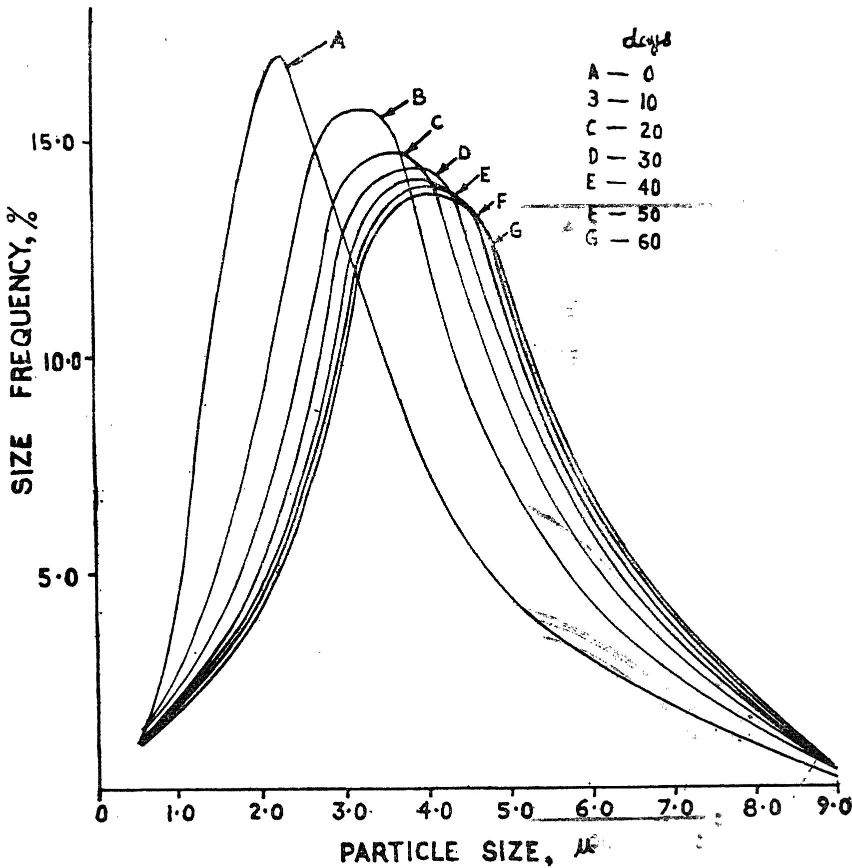
करने पर ज्ञात होता है कि चूंकि पायस समकणपरिक्षेपी नहीं है, अतएव कालप्रभावन से पायस बिन्दुकों के कण-परिमाण में निरन्तर वृद्धि होने के कारण, इन वक्र रेखाओं की आकृति, ऊंचाई तथा चौड़ाई में परिवर्तन होता है। इस प्रकार मोम पायस के कालप्रभावन से, पायस के प्रति इकाई आयतन में बिन्दुकों की संख्या में ह्रास होता है तथा व्यष्टिगत कण-परिमाण बढ़ता है, जिससे कण-परिमाण वितरण वक्रों की ऊँचाई में कमी तथा चौड़ाई में विस्तरण होता है।

अपरूपण की उच्च दर पर, पायस के बिन्दुक पूर्णतः अनूर्णित हो जाते हैं, जिससे सम्पूर्ण संरचना नष्ट हो जाती है और ये एक दूसरे से समान दूरी पर रहते हैं। इन बिन्दुकों के मध्य संतत प्रावस्था की परत होती है, जिसकी मोटाई माध्य कण-परिणमाण (D_m) पर निर्भर करती है। यदि बिन्दुकों को दृढ़ गोलकों के समान मान लिया जाये, तो पृथक्करण के माध्य व्यास (a_m) की गणना निम्न समीकरण द्वारा की जा सकती है[7]

$$a_m = D_m \left\{ \left(\frac{\phi_{max}}{\phi} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right\} \quad (3)$$

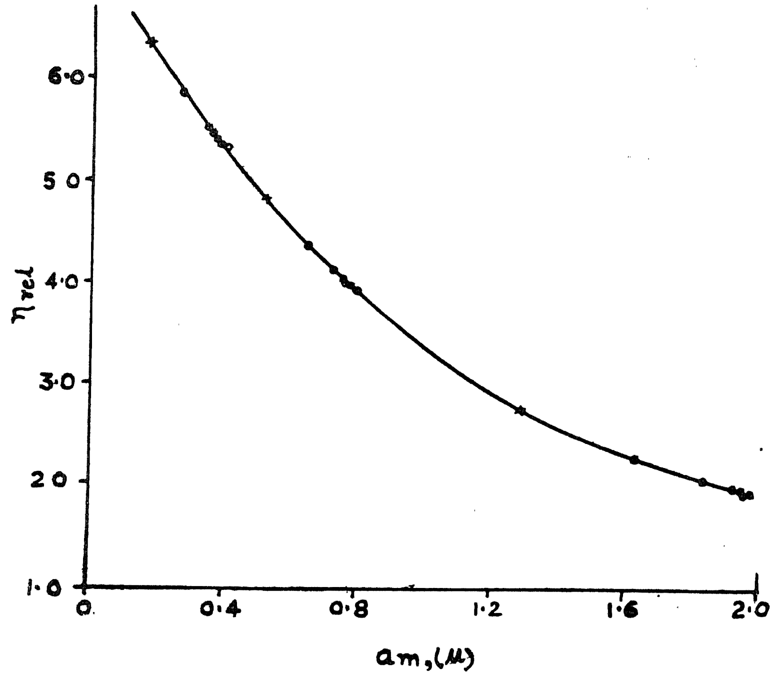
जहाँ $\phi_{m\,x}$ परिक्षिप्त प्रावस्था की इष्टतम आयतन सान्द्रता है, जो पायस में समावेश की जा सकती है। इस दृष्टान्त में ϕ_{max} का मान, षट्कोणीय जालक में व्वस्थित सम आकृति में गोलकों के सैद्धांतिक मान (0.74) के समान है।

यह सर्वविदित है[8] कि कण-परिमाण तथा परिमाण वितरण पायसों की श्यानता को प्रभावित करते हैं, अतएव जब पायसों को कालप्रभावित किया जाता है तो श्यानता के मान में भी परिवर्तन होना चाहिये। प्रस्तुत अन्वेषण में 2.0% पायसीकारक सांद्रण तथा 0.1 से 0.65 तक ϕ के मान से निर्मित कालप्रभावित जले-तैलम् पायसों में अपरूपण की उच्च दर पर श्यानता में परिवर्तन का अध्ययन किय गया है। कालप्रभावन से मोम पायसों के प्रवाह गुणों में काफी अन्तर आता है। उदाहरणतः, कालप्रभावन के 60 दिवसों के पश्चात्, $\phi=0.5$ पर, पायस की आपेक्षिक श्यानता का मान 4.824 से 3.900 तक घटता

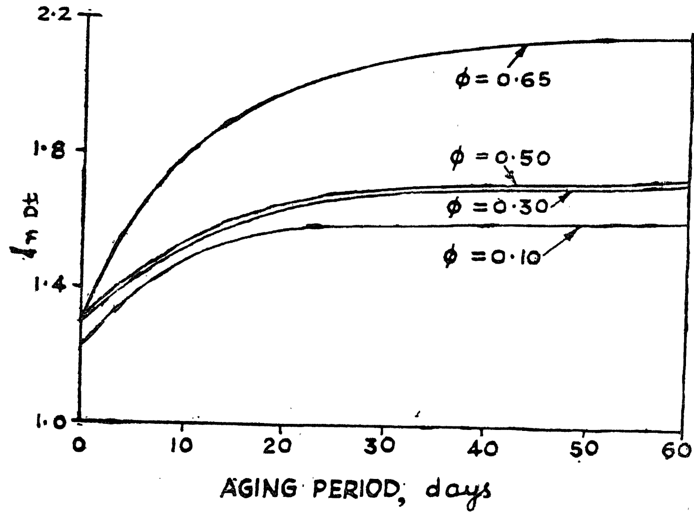


चित्र 2. अनायनिक पृष्ठ सक्रियक द्वारा स्थायीकृत तारपीन (मॉनटन मोम) जल पायस के कण-परिमाण वितरण आंकड़ों पर कालप्रभावन का प्रभाव

है, D_m का मान 3.746 μm से 5.731 μm तक बढ़ता है तथा साथ ही a_m का मान भी 0.5229 μm से 0.8001 μm तक बढ़ता है।

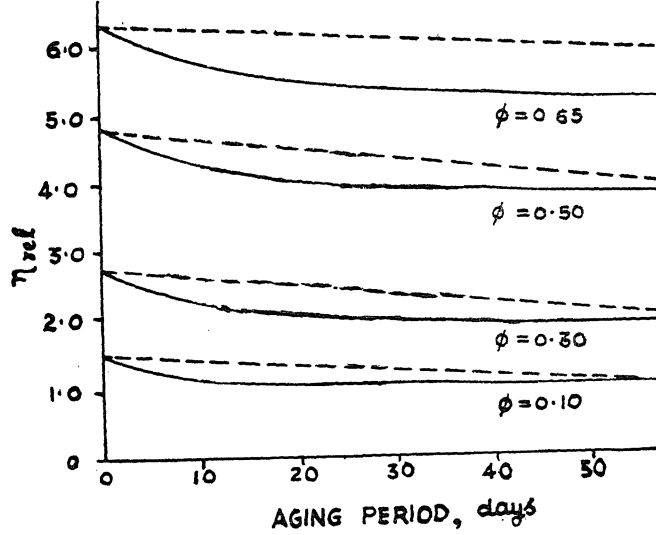


चित्र 3. नवनिर्मित (●) तथा कालप्रमावित (×), जले-तैलम् मोम पायसों की ηrel पर a_m का प्रभाव



चित्र 4. मोम पायसों के विभिन्न ϕ स्तरों पर, l_n Dt तथा कालप्रभावन अवधि के मध्य आलेखे

a_m का प्रभाव η_{rel} पर दर्शाने के लिये, श्यानता आंकड़ों को आलेखित करने पर ज्ञात होता है कि नवनिर्मित तथा कालप्रभावित दोनों प्रकार के मोम पायसों में, a_m का मान बढ़ने पर, η_{rel} का परिवर्तन समान ही है (चित्र 3) । अतः कालप्रभावन अवधि में, D_m की निरन्तर वृद्धि, η_{rel} पर अपना मेय प्रभाव डालती है ।



चित्र 5. मोम पायसों के कालप्रभावन द्वारा आपेक्षिक श्यानता में सैद्धांतिक तथा प्रायोगिक परिवर्तनों की तुलना

बिन्दुक संलयन दर की गणना, कुछ दिनों के पश्चात् पायस के प्रति इकाई आयतन में बिन्दुकों की संख्या में परिवर्तन अथवा माध्य कण-परिमाण की वृद्धि दर द्वारा की जा सकती है । यदि यह मान लिया जाये कि मंद संलयन की दर (Cs), ऊर्णित बिन्दुकों के मध्य संतत प्रावस्था की महीन परत के संविदारण की प्रायिकता और बिन्दुकों के चारों ओर अधिशोषित पायसीकारक अणुओं के मध्य हाइड्रोजन आबन्धों के संविदारण द्वारा पूर्णतः नियंत्रित होती है, तो

$$Nt = No\ exp\ (-Cst) \tag{4}$$

जहाँ No प्रति इकाई आयतन में बिन्दुकों की प्रारम्भिक संख्या तथा Nt कालप्रभावन समय t से पश्चात् इनकी संख्या है, चूंकि

$$N = \frac{6\phi \times 10^{12}}{\pi D_m^3} \tag{5}$$

समीकरण (4) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$l_n\ Dt = l_n\ D_o + C_s t/3 \tag{6}$$

जहाँ D_o तथा Dt क्रमशः शून्य समय तथा कालप्रभावन अवधि t के पश्चात् D_m के मान हैं ।

समीकरण (4) अथवा (6) का गणितीय विकास इस कल्पना पर आधारित है कि C_s का मान पायस के प्रति घन से०मी० में बिन्दुकों की संख्या (N) पर निर्भर नहीं करता है। यह दशा केवल मंद संलयन पर लागू होती है। मोम पायसों की सम्पूर्ण कालप्रभावन अवधि में संलयन की एकसमान दर नहीं होती है। द्रुत संलयन की आरम्भिक अवस्था, जो बहुधा कुछ दिनों तक रहती है, के पश्चात् मन्द संलयन की दूसरी अवस्था आती है, जो कालप्रभावन की शेष अवधि तक होती रहती है। ऊर्णन के बाद, द्रुत संलयन में समस्त बिन्दुक संलयित नहीं हो जाते हैं. परन्तु इसमें मंद संलयन की तुलना में किंचित क्षिप्र दर से संलयन होता है। कालप्रभावन के आरम्भ के कुछ दिनों में, मोम पायसों में सार्थक रूप से क्रीमीकरण नहीं होता है, अतएव यह नहीं कहा जा सकता कि द्रुत संलयन का सम्बन्ध इस सिद्धान्त से है।

समीकरण (6) केवल मंद संलयन के लिये लागू होता है। इस समीकरण द्वारा प्रस्तावित संलयन की तुलना में, द्रुत संलयन के दौरान, अधिक तेज़ी से बिन्दुकों का संलयन होता है, क्योंकि इसमें अन्य कई घटकों को भी सम्बद्ध करना होता है। इस कारण, ηrel के परिवर्तन को यथार्थ रूप से दर्शाने के लिये, $l_n\,Dt$ तथा t के मध्य आरेख को तब तक जारी रखना चाहिये, जब तक कि मंद संलयन अवस्था की रैखिकता पूर्णतः स्थापित नहीं हो जाती। चित्र (4) में, मोम पायसों के लिए 0.10-0.65ϕ परिसर में $l_n\,Dt$ तथा t के मध्य आरेख दिखाया गया है। आरेख को कुछ दिनों तक जारी रखा गया ताकि मंद संलयन अवस्था की रैखिकता उपलब्ध हो जाये। वक्र, द्रुत तथा मंद दोनों ही प्रकार के संलयनों की जानकारी देते हैं। कालप्रभावन के 60 दिवसों की अवधि में, पायसों में 0.10 तथा 0.50 ϕ परिसर के मध्य मंद संलयन की रैखिकता पाई गई है।

मंद संलयन में, C_s का मान वक्रों के रैखिक भागों द्वारा ज्ञात किया गया है और मोम पायसों के वास्ते इसका मान 21.605×19^{-8} Sec^{-1} पाया गया। समीकरण (6) द्वारा विभिन्न कालप्रभावन अवधियों के लिये Dt के मान की गणना की गई है। चित्र (3) से Dt अथवा a_m के किसी भी मान के लिये ηrel का संगत मान ज्ञात करके, इसका मान, 60 दिवस कालप्रभावन अवधि के लिये ज्ञात प्रायोगिक मान के साथ चित्र (5) में आरेखित किया गया है।

ηrel के सैद्धांतिक (बिन्दुकित रेखायें) तथा प्रायोगिक आँकड़े संतोष जनक रूप से एक दूसरे के अनुरूप नहीं हैं, क्योंकि मोम पायस, अध्ययन किये गये सम्पूर्ण कालप्रभावन अवधि के दौरान स्थिर दर से संलयित नहीं होते हैं। ηrel का सैद्धांतिक मान मंद संलयन पर निर्भर करता है, जबकि जले-तैलम् मोम पायसों की कालप्रभावन अवधि में द्रुत तथा मंद दोनों प्रकार के संलयन होते हैं।

निर्देश

1. शर्मा, एम० के०, जैन, के० डी०, जैन ए० के० तथा शर्मा, बी० के०, **इन्डियन जर्न० टेक्नोल०**, 1979, **17**, 390

2. शर्मा, एम० के०, जैन, के० डी०, जैन, ए० के० तथा शर्मा, बी० के०, **इन्डियन जर्न० टेक्नोल०** 1980, **18**, 39

3. शिलाबर, सी० पी०, Photomicrography in Theory and Practice, विले, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 41.

4. शर्मा, एम० के०, प्रोग्रेस कोलाइड एण्ड पॉलिमर साइंस, 1978, **63**, 90

5. वाइजेनबर्ग, के०, Proc. 1st Intern. Congr. Rheol., नॉर्थ हॉलेन्ड पब० क०, एम्सटर्डम, 1949

6. जेलिनेक, एच० एच० जी०, **जर्न० सोसा० केमि० इण्ड०**, 1950, **69**, 225

7. शर्मन, पी०, Emulsion Science, अकादमी प्रेस, लंदन, 1969, पृष्ठ 304

8. शर्मन, पी०, Proc. 3rd Intern. Congr. Surface Activity, कोलॉन, 1960, **2**, 596

9. वैन डेन टेम्पेल, एम०, Proc. 2nd Intern. Cnogr. Surface Activity, लंदन, 1957, **1**, 439

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 117-123

ट्रायेन्थीमा पोर्चुलैकास्ट्रम के मूलतन्त्र का आकारिकीय स्वरूप एवं वृद्धि आचरण

एस० के० महाजन
वनस्पतिशास्त्र विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, खरगोन

[प्राप्त—सितम्बर 28, 1981]

सारांश

ट्रायेन्थीमा पोर्चुलैकास्ट्रम एजोयेसी कुल का एक सदस्य है। यह मुख्य रूप से मलाया, पश्चिमी एशिया, अफ्रीका, उष्ण अमेरिका (केलिफोर्निया सहित), आस्ट्रलिया और अधिकांश अन्य देशों के शुष्क एवं मामूली उष्ण प्रदेशों में पाया जाता है। भारत एवं लंका में यह वर्षा ऋतु में पाया जाने वाला एक सामान्य अपतृण है। प्रस्तुत प्रपत्र में सम्बन्धित पौधे के मूलतन्त्र में उपस्थित कुछ रोचक पारिस्थितिक अनुकूलनों का अध्ययन किया गया है तथा इन अनुकूलनों का पारस्परिक सम्बन्ध पौधे के आवास, मृदा-प्रकृति एवं प्राप्य जल से दर्शाया गया है।

Abstract

Morphology and growth behaviour of Trianthema portulacastrum L. *By* S. K. Mahajan, Department of Botany, Government Postgraduate College, Khargone.

Trianthema portulacastrum L. is a member of the family Aizoaceae. It is chiefly confined to drier and warmer regions of Malaya, Western Asia, Africa, Tropical America (including California), Australia and most other countries. It is a common rainy season weed throughout India and Ceylon.

In the present paper some interesting ecological adaptations of its root system have been studied and these are correlated with its habitat, nature of the soil and the available water supply to the plant.

यह भलीभाँति ज्ञात है कि नम एवं शुष्क स्थानों पर पौधों के मूलतंत्रों के आकारिकीय स्वरूप एवं वृद्धि आचरणों में पर्याप्त भिन्नता पाई जाती है। मूलतंत्रों के विकास में नमी के अतिरिक्त अन्य मृदा कारक भी अपना प्रभाव डालते हैं। इस सम्बन्ध में विदेशों एवं भारत में भी कुछ शोध कार्य हुआ है।[1-3]

प्रस्तुत प्रपत्र में **ट्रायेन्थीमा पोर्चुलैकास्ट्रम** नामक पौधे के मूलतन्त्र में उपस्थित कुछ रोचक अनुकूलनों का अध्ययन किया गया है तथा इन अनुकूलनों का पौधे के आवास, मृदा-प्रकृति एवं उसका प्राप्यमृदा जल से जो पारस्परिक सम्बन्ध है, उसे दर्शाया गया है।

अध्ययन क्षेत्र

प्रस्तुत अध्ययन पिलानी एवं उसके निकटवर्ती क्षेत्रों में से निम्नलिखित मुख्य सात स्थानों का चयन करके किया गया है।

1. राजस्थान छात्रावास क्षेत्र, 2. कृषि फार्म क्षेत्र तथा 3. वनस्पति उद्यान क्षेत्र, 4. भैरली क्षेत्र, 5. एन० सी० सी० ग्राउण्ड; 6. शिवगंगा क्षेत्र; 7. तालाब क्षेत्र।

इस क्षेत्र की जलवायु उष्ण है तथा यहाँ अत्यन्त ही कम एवं उच्च ताप पाया जाता है जो जनवरी में 7.78° से० से लेकर मई में 44.4° से० तक पहुँच जाता है। यहाँ की वार्षिक औसत वर्षा गत चार वर्षों में 63.09 सेमी० अंकित की गई है।

प्रयोगात्मक

चयन किये गये स्थानों से पौधे के मूलतन्त्रों को समय-समय पर सावधानीपूर्वक प्राप्त कर रेखांकित चित्र खींचे गये तथा इन स्थानों की मृदाओं के 7.5, 15.0, 22.5 और 30.0 सेमी० गहराई से नमूने प्रयोगशाला में लाकर उनका विश्लेषण किया गया और विशेष रूप से प्रतिशत नमी एवं कार्बनिक पदार्थ की मात्रा ज्ञात की गई। इन स्थानों की मृदाओं को लाकर कल्चर प्रयोग किये गये और इन कल्चर पौधों के मूलतन्त्रों एवं सामान्य मूलतन्त्रों का अवलोकन करके विभिन्न मृदा कारकों का प्रभाव ज्ञात किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सईदुद्दीन तथा कामर-सिद्दीकी[4] के सुझाव के अनुसार ट्रायेन्थीमा **पोर्चुलैकास्ट्रम** का मूलतंत्र उथले मूलतन्त्र के पारिस्थितिक प्रकार के अन्तर्गत रखा जा सकता है। जड़ का स्वभाव प्राप्य मृदा कारकों के प्रति अनेक अनुकूलन दर्शाता है। मूलतंत्र एवं उसके विभिन्न पोषाधारों के मध्य एक निश्चित पारस्परिक सम्बन्ध अवलोकित किया गया है।

प्राथमिक मूसला जड़ भूमि में लगभग 10 से 15 सेमी० तक गहराई में प्रवेश कर दो प्रधान पार्श्व मूलों में विभाजित होती हैं जो मृदा की प्रकृति पर निर्भर करता है। दोनों पार्श्व मूल भूमि के धरातल से प्रायः समान्तर विपरीत दिशाओं में बढ़ती है तथा आधार से लगभग 45 सेमी० तक गहराई में प्रवेश कर 60 सेमी० तक लम्बाई धारण कर लेती है। ये दोनों पार्श्वमूल चारों ओर भूमि में शाखित होकर अपने सूक्ष्ममूलकों के द्वारा एक व्यापक क्षेत्र घेर लेते हैं।

किसी विशेष क्षेत्र में इन मूलकों की आवृत्ति एवं बाहुल्यता मुख्य रूप से जल की मात्रा पर निर्भर करती है। पार्श्वमूलों की दिशा का भी अत्यन्त महत्व है। उनके बीच का कोण 30°-120° तक पाया गया

है । कृषियोग्य भूमि (दुमट) में दोनों पार्श्वमूल 40°-70° का कोण बनाते हैं । साधारणतः मुख्य जड़ आधार पर लगभग 0.5-0.6 सेमी० व्यास में होती है परन्तु फेरली क्षेत्र (रेतीली दुमट भूमि) में एक पौधे की जड़ का व्यास आधारीय भाग में 1.1 सेमी० पाया गया । कृषियोग्य भूमि में कुछ मूलतंत्र विचित्र अनुकूलन दर्शाते हैं और वे अन्त में छोटी गोलाकार रचना बनाते हैं जो सम्भवतः पौधे की संकवकी स्वभाव की ओर संकेत करती है । फिर भी उसका विस्तृत अध्ययन नहीं किया जा सका है । कुछ मूलतंत्रों में यह देखा गया है कि मुख्य जड़ अविकसित होने से घट कर केवल 2-4 सेमी० लम्बाई में रह जाती है और अपनी सतह पर सूक्ष्ममूलकों को अनेक समूहों में विकसित करती है । यह तथ्य कृषियोग्य भूमि तथा उद्यान भूमि (चिकनी दुमट) के अध्ययन किये गये अनेक मूलतन्त्रों में अवलोकित किया गया है । इन सब तथ्यों के अतिरिक्त इनका मूलतन्त्र सुविकसित पाया गया है जो इस पौधे के अध्ययन को अधिकाधिक रोचक बनाता है ।

विभिन्न स्थानों एवं आवासों से प्राप्त मूलतंत्रों का विस्तृत अध्ययन लगभग समान आकार एवं आयु के पौधों का चयन करके किया गया है और उनके मूलतंत्रों के समय-समय पर रेखांकित चित्र खींचे गये हैं । रेतीली भूमि, कृषियोग्य भूमि एवं कूड़ा-करकट वाले स्थानों में मूलतंत्रों का परिवर्धन उनके सामान्य आकार में स्पष्ट अवलोकित किया गया है । सारणी 1 तथा 2 में दर्शाये गये परिणामों की पुष्टि कल्चर प्रयोगों द्वारा भी की गई है ।

रेत टीलों पर से इस पौधे की अनुपस्थिति के दो कारण हैं :

रेत में कार्बनिक पदार्थ की अल्प मात्रा तथा अल्प वर्षा के जल की उच्च च्यावन दर । अतः पौधे के लिये अपने उथले मूलतंत्र के द्वारा अधिक गहराई से जल अवशोषित करना बहुत ही कठिन होता है ।

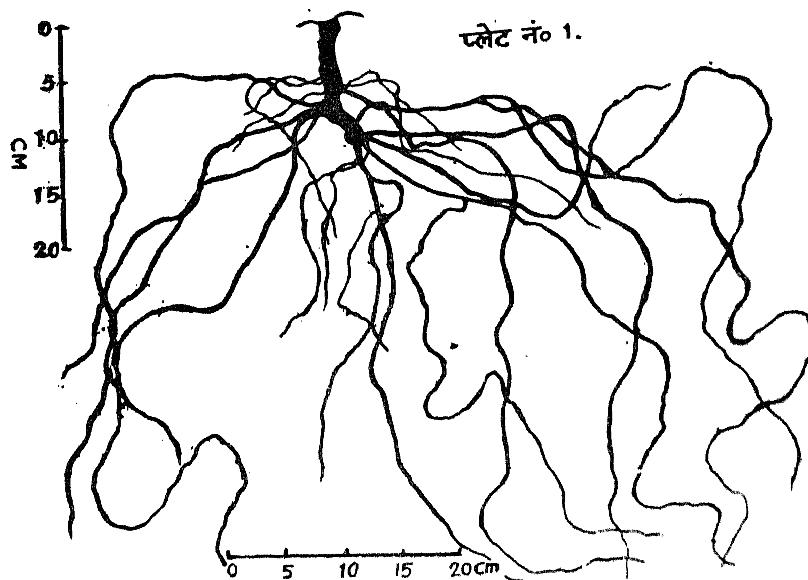
लाल एवं हरे पौधे जो इस जाति के अन्तर्गत प्राप्त हुए हैं उनसे यह परिलक्षित होता है कि लाल पौधे के मूलतंत्र हरे पोधे के मूलतंत्रों की अपेक्षा अधिक परिवर्तित हैं (महाजन[5]) ।

इस अध्ययन से ज्ञात होता है कि मूलतंत्र ऐसे क्षेत्रों में पतला एवं कम विस्तीर्ण होता है जहाँ जल की मात्रा अधिक होती है, जबकि वह कम जल वाली भूमि में मोटा एवं अधिक घना होता है । इसके अतिरिक्त मुख्य जड़ की दो पार्श्वों में विभाजित होने की प्रवृत्ति पौधे की जल के प्रति अत्यधिक माँग की ओर संकेत करती है जिसकी पूर्ति करने में भूमि असमर्थ रहती है । परन्तु अनेक पार्श्वमूलकों के अत्यधिक विस्तार के कारण इस माँग की पूर्ति हो जाती है । इसमें पौधे को ऐसी भूमि से अधिकाधिक जल अव-शोषित करने में सहायता मिलती है जहाँ पर पानी प्रचुर मात्रा में संचित रहता है । ये पार्श्वमूलक भूमि के धरातल के सुराग लगाने वालों के समान कार्य करते हैं । जो जल को अवशोषित करने के लिए उसकी तह तक पहुँचने के लिये सामान्य प्रवृत्ति दर्शाते हैं और इस प्रकार जल के नये भंडार के सम्पर्क में आते रहते हैं ।

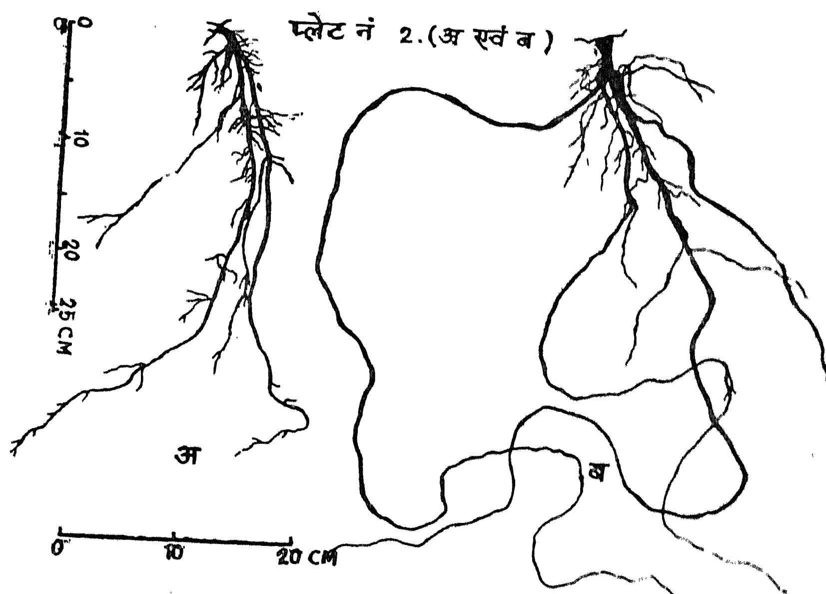
कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० एम० सी० जोशी द्वारा मार्ग-दर्शन के लिये लेखक उनका आभारी है ।

विभिन्न स्थानों से प्राप्त मूल तंत्रों के रेखाचित्र (सामान्य से चौथाई आकार)



प्लेट नम्बर–1 एन० सी० सी० ग्राउन्ड में अत्यधिक विकसित मूलतंत्र

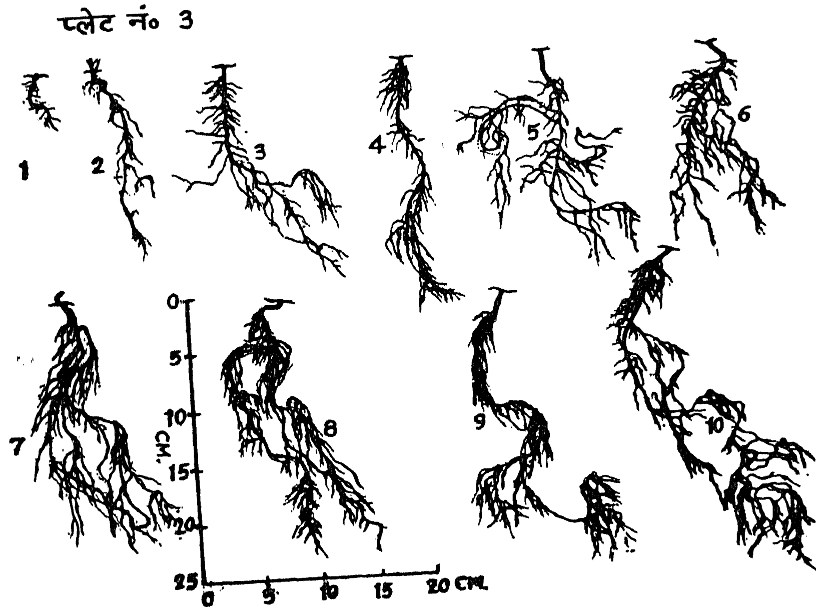


प्लेट नम्बर–2 (अ) वनस्पति उद्यान क्षेत्र में अत्यधिक विकसित मूलतंत्र
प्लेट नम्बर–2 (ब) भेरली क्षेत्र में मूलतंत्र

सारणी 1

विभिन्न प्रकार की मृदाओं में मूलतंत्र की प्रकृति

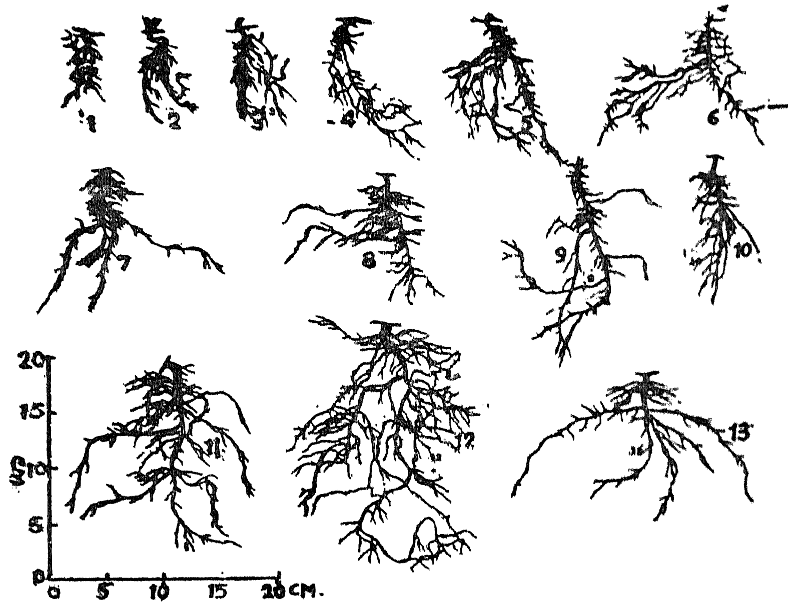
क्रमांक	मृदा	मूलतंत्र
1.	रेतीली	मोटा एवं बहुत विस्तृत और व्यापक
2	दुमट	पतला, उथला एवं कम व्यापक, पार्श्वमूलकों की आवृत्ति अधिक
3.	चिकनी दुमट	पतला एवं उथला मूलतंत्र, पार्श्वमूलकों की आवृत्ति लोम की अपेक्षा अधिक
4.	रेतीली दुमट	मोटा व अत्यधिक व्यापक मूलतंत्र



प्लेट नम्बर–3 विभिन्न प्रकार की मृदाओं में पौधे के मूलतंत्र का विकास (कल्चर प्रयोग)

आकृति 1 से 10 तक : 1–चिकनी मिट्टी, 2–सामान्य मृदा (अन्तर जातीय प्रतिस्पर्धा से युक्त) 3–सामान्य मृदा (सामान्य जल में), 4–सामान्य मृदा (अन्तर जातीय प्रतिस्पर्धा से रहित), 5–सामान्य मृदा (पानी अनियमित रूप से प्राप्त), 6–दुमट (लोम) 7–सामान्य मृदा (प्राकृतिक स्थितियों में) 8–ब्रिक-किल्न मृदा, 9–कृषि फार्म मृदा, 10–वनस्पति उद्यान मृदा में क्रमशः मूलतंत्रों का विकास।

प्लेट नं० 4



प्लेट नम्बर–4 आकृति 1 से 6 तक और 12 कृषि फार्म क्षेत्र आकृति 7, 10, एवं 13 वनस्पति उद्यान क्षेत्र आकृति 8 शिवगंगा क्षेत्र आकृति 9 तालाब क्षेत्र

सारणी 2

विभिन्न स्थानों की मृदा में प्रतिशत नमी एवं कार्बनिक पदार्थ

क्रमांक	स्थान	मृदा के नमूने की गहराई(सेमी०)	% नमी	कार्बन %
1	2	3	4	5
1.	रेतीला (राजस्थान छात्रावास क्षेत्र)	7.5	0.56-4.13	0.05-1.23
		15.00	0.32-5.23	0.12-0.92
		22.5	0.37-4.14	0.09-0.54
		30.00	0.49-4.75	0.17-0.47
2.	दुमट (कृषि फार्म क्षेत्र)	7.5	2.45-11.91	0.85-2.69
		15.00	1.98-10.70	0.65-4.57
		22.5	2.56-11.32	0.79-3.20
		30.00	2.17-9.20	0.82-6.80

1	2	3	4	5
3.	चिकनी दुमट (वनस्पति उद्यान)	7.5	0.87-12.10	0.19-0.88
		15.00	0.89-8.80	0.10-0.85
		22.5	1.45-9.34	0.62-0.98
		30.00	1.60-4.75	0.19-0.72
4.	रेतीली दुमट (झेरली क्षेत्र)	7.5	2.34-6.27	0.25-0.63
		15.00	2.12-7.89	0.09-0.52
		22.5	2.83-6.75	0.29-0.59
		30.00		

निर्देश

1. विलकाक्स, एच०, **अमे० जर्न० बाट०**, 1962, **49**B, 237-45
2. पन्त, डी० डी०, **जर्न० इंडि० बाट० सोसा०**, 1943, **22**, 1-26.
3. टंडन, एस० के०, **यूनि० राजपू० स्ट०**, 1955, 27-30.
4. सईदुद्दीन, एम० तथा कामर सिद्दीकी, **प्रोसी० इंडि० साइं० काग्रे० एब्स्ट्रैक्ट, भाग-3** 1954, **41**, 115, 160.
5. महाजन, एस० के०, **जियोबायोस**, 1980, **7**, 161-63.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982 Pages, 125-129

ट्रायेन्थीमा पोर्चुलैकास्ट्रम लिन० के बीजों का अंकुरण

एस० के० महाजन
पोस्टग्रैजुएट डिपार्टमेन्ट ऑफ बॉटनी, राजकीय कॉलेज, खरगोन

[प्राप्त—1, जरवरी 1981]

सारांश

बीजों के अंकुरण पर भिन्न-भिन्न दशाओं में में प्रयोग किये गये। विकीर्ण प्रकाश में औसत प्रतिशत अंकुरण 20.8 था। लगातार अंधकार में, अंधकार और प्रकाश में बारी-बारी से रखने पर तथा बीज चोल (आवरण) को हटा देने पर यह बढ़कर क्रमश: 34.4, 42.8, और 58.4 हो गया। लगातार प्रकाश में तथा बारी-बारी से सुखाने और भिगोने पर यह घटकर क्रमश: 8.2 तथा 7.6 हो गया।

Abstract

Seed germination of trianthema portulacastrum Linn. *By* S. K. Mahajan, Post Graduate Department of Botany, Government College, Khargone.

Experiments on seed germination were conducted under different conditions. The average percentage germination was 20.8 under diffused light. It was high in continuous dark, alternate light and dark and after breaking seed coat being 34.4, 42.8, and 58.4 respectively. Experiments performed under conditions of continuous light and alternate drying and wetting gave low values i.e. 8.2 and 7.6 respectively.

ट्रायेन्थीमा पोर्चुलैकास्ट्रम लिन (Trianthema portulacastrum Linn.), जो जनसामान्य के बीच 'सांथी' नाम से जाना जाता है, वर्षा ऋतु में उगने वाले खरपतवारों (weeds) में एक है और सम्पूर्ण भारतवर्ष और श्रीलंका में पाया जाता है। प्रस्तुत शोधपत्र विभिन्न दशाओं में उनके बीजों के अंकुरण से सम्बन्धित है।

प्रयोगात्मक

बीज अक्टूबर मास में एकत्र किये गये तथा उनपर अंकुरण सम्बन्धी प्रयोग भण्डारण के पश्चात् दूसरे वर्ष की जुलाई मास में किये गये (लगभग 8 महीने बाद)। आर्द्र फिल्टर पेपर के साथ 25-25 बीज

रखकर 5 पेट्रीडिश का एक सेट तैयार किया गया जिन्हें विभिन्न दशाओं में रखा गया। नियन्त्रण (control) को सामान्य प्रकाश में रखा गया। हर प्रयोग को कई बार दोहराया गया। 45 दिनों तक प्रतिदिन इनका निरीक्षण किया गया। ये प्रयोग कमरे के अन्दर किये गये जहाँ धूप का प्रकाश खिड़की के शीशों से आता था। रात्रि में इन्हें बिजली के बल्ब से प्रकाश प्रदान किया गया जो इन्हीं पेट्रीडिश के ऊपर छत से लटकाया गया था। कोई एक सेट 24 घण्टों तक भिगोकर रखा गया और फिर अगले 24 घण्टों तक उसे सूखा रहने दिया गया। यह क्रम कई बार दुहराया गया। बीजचोल के यांत्रिक विक्षतीकरण के लिए उन्हें दो सोख्ता काग़जों के बीच दबाकर उन पर शीशे की छड़ से हल्का प्रहार किया गया। अंकुरण प्रयोगों के पहले ऐसे बीजों का चुनाव किया गया जिनके बाह्य खोल फटे हुए थे परन्तु अन्दर का पदार्थ सुरक्षित था। नवभ्रूण को किसी प्रकार की क्षति न पहुँचे इसकी सावधानी बरती गई। प्रारम्भ में अन्धकार का प्रभाव देखने के लिए 16 पेट्रीडिशों में से एक को प्रकाश में रखा गया और अन्य सभी को अन्धकार में। फिर प्रतिदिन एक-एक पेट्रीडिश को प्रकाश में स्थानांतरित किया जाता रहा। बीजों के अंकुरण पर वातावरण के तापमान के प्रभाव का निरीक्षण करने के लिए थोड़े-थोड़े समय का अन्तराल देकर ये प्रयोग जुलाई से दिसम्बर तक किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

इन प्रयोगों से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

1. **विकीर्ण प्रकाश में** : भिगोने के 18 घण्टों के अन्दर ही अंकुरण होने लगा। दूसरी पेट्रीडिश के बीजों में अलग-अलग दिनों पर अंकुरण होता रहा। अंतिम में यह 17 दिनों पर हुआ। प्रतिशत अंकुरण 20.8 था।

2. **लगातार प्रकाश में** : अंकुरण 60 घण्टों के अन्दर ही प्रारम्भ हुआ और 12 दिनों तक होता रहा। प्रतिशत अंकुरण 8.2 था।

3. **लगातार अन्धकार में** : अंकुरण 14 घण्टों के अन्दर प्रारम्भ हो गया और 14 दिनों तक चलता रहा। प्रतिशत अंकुरण 34.4 था।

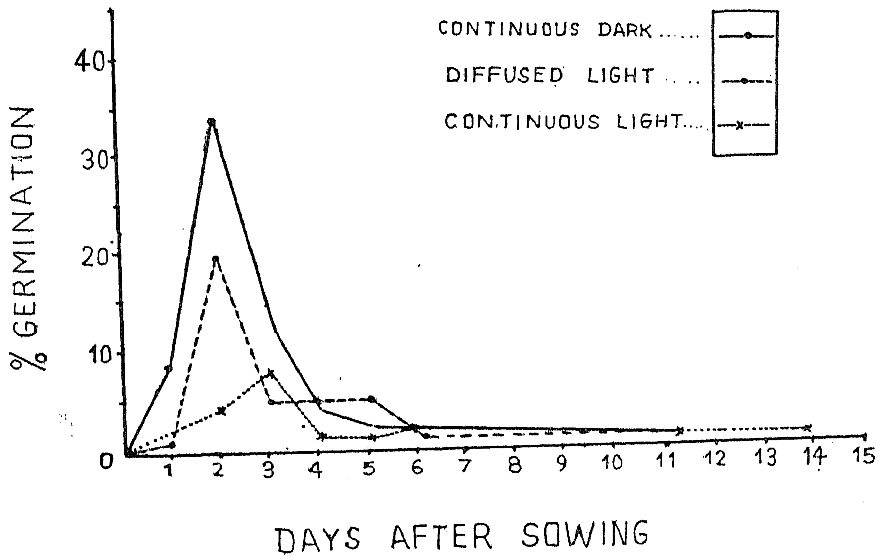
4. **बारी-बारी से भिगोने और सुखाने पर** : ऐसा सूचित किया गया है कि बारी-बारी से भिगोने और सुखाने से अंकुरण की गति बढ़ गई है। उदाहरण के लिए शिपिन्डेल्स (Chippindales Report—देखिए पोर्टर 1947 डाक्टाइलिस ग्लोमेराटा (Dactylis glomerata)। तथापि ट्राइन्थेमा पोर्चुलाकास्ट्रम के सम्बन्ध में स्थिति इससे उल्टी है क्योंकि यहाँ प्रतिशत अंकुरण घटकर 7.6 रह गया जिसकी पुष्टि जोशी और काम्भोज[4] ने गाइसेकिया फार्नेसिओइडीज (Gisekia pharnaceoides) के सम्बन्ध में की है।

5. **बारी-बारी से प्रकाश और अन्धकार में** : अंकुरण 23 घण्टों के बाद प्रारम्भ हुआ और 26 दिनों तक चलता रहा। प्रतिशत अंकुरण 42.8 था। किन्तु गाइसेकिया फार्नेसिओइडीज के सम्बन्ध में स्थिति उल्टी है क्योंकि यहाँ प्रतिशत अंकुरण घटकर 10 हो गया।

6. **यान्त्रिक विक्षतीकरण** : स्वपारस्थितिकी (Antecology) के क्षेत्र में कार्य करने वाले मिश्रा और राव[5] तथा बक्शी[2] ने इस प्रकार उपचारित करने पर प्रतिशत अंकुरण में वृद्धि सूचित की है। प्रस्तुत प्रयोग में अंकुरण 11 घण्टों के बाद प्रारम्भ हुआ और 26 दिनों तक चलता रहा। यहाँ उच्चतम प्रतिशत अंकुरण 58.4 था।

7. **प्रारम्भ में अन्धकार में रखने पर** : यह पाया गया कि प्रारम्भिक अवधि में अंधकार देने पर सामान्य दशा में अंकुरण पर उल्लेखनीय प्रभाव पड़ता है। बक्शी[1] ने भी (एनिसोकिलस एरियोसिफेलस) **(Anisochilus eriocephalus)** के सामान्य प्रतिशत अंकुरण में 6.2 से 13.4 तक की वृद्धि देखी है। जब प्रारम्भिक अंधकार की अवधि 7 दिन के लिए बढ़ा दी गई तब 12वें दिन प्रतिशत अंकुरण की दर में एक उल्लेखनीय कमी देखी गई जो लगभग शून्य तक पहुँच गई। किन्तु जोशी और काम्मोज[4] ने गाइसेकिया फार्नैसिओ इडीज़ के सम्बन्ध में प्रतिशत अंकुरण की इससे उल्टी स्थिति सूचित की है जहाँ अंधकार की प्रारम्भिक अवधि को बढ़ा देने पर अंकुरण की गति में कमी आ जाती है।

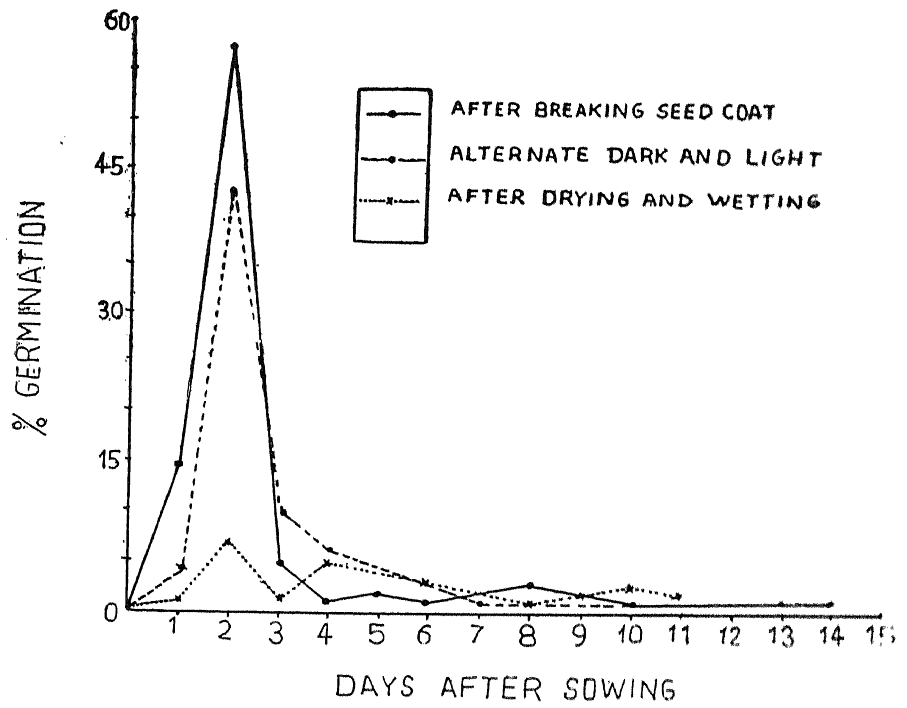
भिन्न-भिन्न दशाओं में अंकुरण सम्बन्धी प्रयोगों के परिणाम चित्र 1 में प्रदर्शित किये गये हैं।



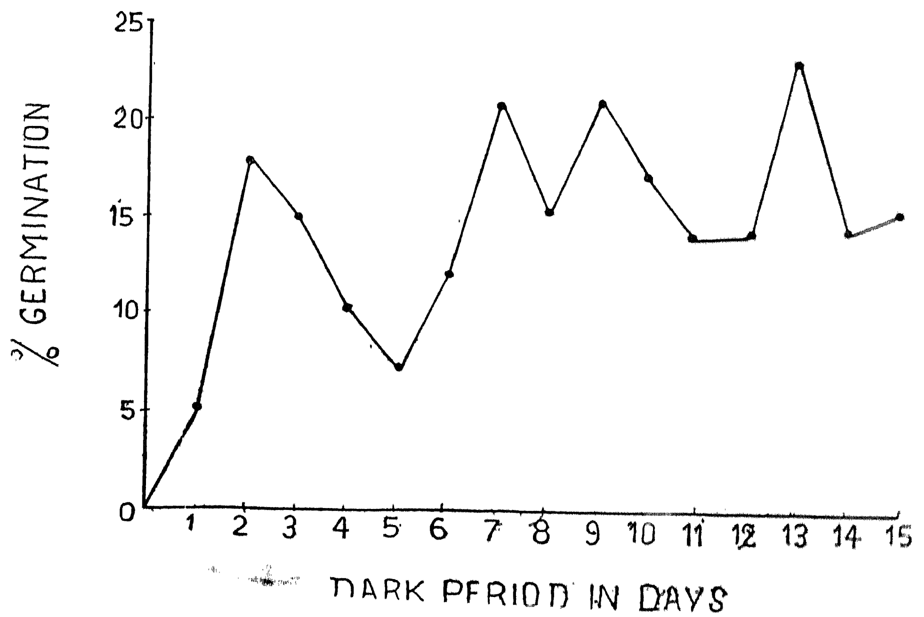
चित्र (1अ)

8. **वातावरण के तापमान का प्रभाव** : यह देखा गया कि वातावरण के तापमान के कम होने पर अंकुरण की गति भी धीमी पड़ गई जिससे यह सिद्ध हुआ कि शीतकालीन कम तापमान अंकुरण में सहायक नहीं होता। अधिकतम प्रतिशत अंकुरण जुलाई मास में देखा गया जबकि उच्चतम तापमान 31.6°C तक और निम्नतम 27.2°C तक रहा।

इस प्रकार बीजों का औसत प्रतिशत अंकुरण विकीर्ण प्रकाश में 20.8 रहा। लगातार अंधकार में, बारी-बारी से प्रकाश और अंधकार में तथा बीज चोल को हटा देने पर प्रतिशत अंकुरण बढ़ कर क्रमश:


% GERMINATION
AFTER BREAKING SEED COAT
ALTERNATE DARK AND LIGHT
AFTER DRYING AND WETTING
DAYS AFTER SOWING

चित्र (1ब)


% GERMINATION
DARK PERIOD IN DAYS

चित्र (1स)

34.4, 42.8 और 58.4 हो गया। लगातार प्रकाश में और बारी-बारी से भिगोने और सुखाने पर अंकुरण की गति में कमी आई और अंकुरण प्रतिशत क्रमशः 8.2 तथा 7.6 रहा। **ट्रायेन्थीमा पोर्चुलैकास्ट्रम** पर प्रारम्भिक अंधकार की अवधि का प्रभाव न्यूनाधिक मोलुगो सर्विआना (Mollugo cerviana, बक्शी और कपिल[3]) पर पाये गये निष्कर्षों से मिलता-जुलता है। इसके अतिरिक्त बीजों को 4-5 मास तक सुषुप्तावस्था में पड़े रहने की भी आवयकता होती है। इसी तरह यह भी देखा गया कि अंकुरण के लिये उपयुक्त अधिकतम और न्यूनतम तापमान 31.6C° और 28.5C° है जो जुलाई, अगस्त और सितम्बर के महीने में मिल सकता है। प्रकृति में इसकी वृद्धि का यह सर्वाधिक उपयुक्त समय है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत शोध कार्य पिलानी में किया गया और लेखक तत्सम्बन्धी दिशा निर्देश और सुविधाओं के लिए प्रोफेसर एम० सी० जोशी, डिपार्टमेन्ट ऑव बायोसाइन्सेज़, बी० आई० टी० एस० पिलानी, राजस्थान का आभारी है।

निर्देश

1. बक्शी, टी० एस०, **करेन्ट साइन्स**, 1952, ए, **21**, 108.
2. बक्शी, टी० एस०, **जे० आई० बी० एस०**, 1952, बी०, **31**, 269-80.
3. बक्शी, टी० एस० तथा कपिल, आर० एन०, **जर्न० बाम्बे नैचु० हिस्ट० सोसा०**, 1954, **52**, 484-514.
4. जोशी, एम० सी० तथा काम्भोज, ओ० पी०, **जे० आई० बी० एस०**, 1959, **38**(1), 8-32.
5. मिश्र, आर० तथा राव, बी० एस०, **जे० आई० बी० एस०**, 1948, **27**, 187-199.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 131-137

रबड़ एवं पालीमर द्वारा तारकोल के गुणों में सुधार

रामशंकर शुक्ल तथा इनी राम आर्य,
केन्द्रीय सड़क अनुसंधान संस्थान, नई दिल्ली

[प्राप्त—जुलाई 17, 1981]

सारांश

प्रयोगों द्वारा पाया गया है कि पालीमर जैसे डामर, रबड़ , स्टाइरीन पिच और पालीस्टाइरीन को तारकोल अथवा तारकोल पिच के साथ सुचारु रूप से मिलाया जा सकता है। ऐसा भी देखा गया है कि पालीमर की थोड़ी सी मात्रा मिला देने से तारकोल के गुणों में विशाल परिवर्तन आ जाता है । पालीमर मिलाने से तारकोल की सुघट्यता बढ़ जाती है और फ्रास भंगुरता कम हो जाती है, तुल्य श्यान ताप में वृद्धि होती है तथा ताप ग्राहिता में सुधार हो जाता है ।

पालीमर द्वारा परिवर्धित तारकोल तथा रोडी के साथ अधिक स्थायित्व वाले तथा विकृति अवरोधक मिश्रण प्राप्त होते हैं । इस प्रकार के मिश्रण अधिक ताप अवरोधक तथा गाडियों से गिरने वाले तेलों से होने वाली क्षति से कम प्रभावित होते हैं । पालीमर परिवर्धित तारकोल तथा रोड़ी मिश्रण की तुलना में डीजल तथा जेट तेल अधिक प्रतिधारित स्थायित्व दिखाते हैं ।

Abstract

Improvement in the quality of coal-tar by rubber and polymer. *By* Ram Shankar Shukla and Ini Ram Arya, Central Road Research Institute, New Delhi.

It has been found experimentally that the coal-tar and pitches are compatible with long chain polymers like rubber, bitumen, styrene pitch and polystyrene. It is seen that incorporation of a small quantity of these polymers brings about tremendous changes in the rheological properties of the tars. The plasticity interval is increased and Frass Brittle point is reduced. The EVT of the blend is elevated and its temperature susceptibility is considerably modified.

The increased viscosity of the modified tar yields mixture of high stability and is more resistant to deformation at high temperatures. The mixes so produced are more

resistant to temperature changes and also susceptible to damage by the spillage of oil by the turning vehicles. The retained stability in diesel oil and jet fuel of the mixes made with modified tar is higher than those with the tar alone.

1. प्रस्तावना

तारकोल सड़क निर्माण में प्रयोग होने वाला एक अद्वितीय पदार्थ है, अत्यन्त तरल अवस्था में यह कोयले के आसवन द्वारा प्राप्त होता है। सड़क निर्माण में प्रयोग करने के पहले आसवन द्वारा पानी और कुछ बहुमूल्य तेल इसमें से निकाल कर इसे गाढ़ा कर लेते हैं। भारत में यदि जलसह सड़क का सिंहावलोकन किया जाय तो विदित होगा कि पहली जलसह सड़क तारकोल द्वारा कलकत्ते में सन् 1913 में बनाई गई।

तारकोल की बन्धक शक्ति उसकी कठोरता पर निर्भर करती है। ज्यों-ज्यों उसकी कठोरता बढ़ती जाती है त्यों-त्यों उसमें भारी यातायात को वहन करने की क्षमता बढ़ती जाती है। कठोरता का चयन प्रायः उस क्षेत्र की जलवायु पर निर्भर करता है। तारकोल के मुख्य गुणों का विवेचन दो आधार पर किया जाता है : प्रथम तो सर्दी के दिनों में वह इतना अधिक कठोर न हो जाय कि यातायात के विघर्षण स्तर में दरारें पड़ जायें और दूसरे गर्मी के दिनों में पिघल कर इतना तरल न हो जाय कि वह सड़क पर बहने लगे। कभी-कभी यातायात और जलवायु की विषम परिस्थितियों में तारकोल का चयन काफी कठिन हो जाता है। इस परिस्थिति में तारकोल के गुणों को अन्य पदार्थों जैसे रबड़, पालीमर इत्यादि द्वारा परिवर्तित करके प्रयोग में लाया जाता है।

रासायनिक दृष्टि से तारकोल, रबड़ तथा पालीमर एकसमान हैं। ये सभी पदार्थ गर्मी पाकर नरम हो जाते हैं और सर्दी पाकर कठोर हो जाते हैं। अतएव रबड़ तथा पालीमर को लगभग प्रत्येक अनुपात में तारकोल में मिलाया जा सकता है परन्तु मितव्ययिता को ध्यान में रखते हुये 1 या 2 प्रतिशत रबड़ या पालीमर काफी होता है।

तारकोल में 1 या 2 प्रतिशत रबड़ या पालीमर मिला देने से उसके गुणों में काफी परिवर्तन आ जाता है। उसकी श्यानता काफी बढ़ जाती है, उस पर ताप का प्रभाव काफी कम हो जाता है फलस्वरूप सर्दियों में दरारें पड़ती हैं तथा गर्मी में पिघल कर बहने की क्रिया कम हो जाती है। इसके अतिरिक्त उसकी बन्धक शक्ति काफी बढ़ जाती है और उस पर गाड़ियों द्वारा गिरने वाले तेल का प्रभाव कम हो जाता है।

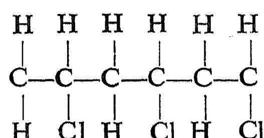
प्रस्तुत प्रपत्र में यह प्रदर्शित किया गया है कि किस प्रकार रबड़ और पालीमर द्वारा तारकोल के गुणों में परिवर्तन लाया जा सकता है। रबड़ और पालीमर के मिलाने से सड़क का टिकाऊपन भी काफी बढ़ जाता है।

2. तारकोल के गुणों का अध्ययन

स्वतन्त्रता प्राप्ति के पूर्व भारत में पाये जाने वाले तारकोल प्रायः विदेशी निर्देशों के आधार पर तैयार किये जाते थे फलतः भारत की गर्म जलवायु में उनका टिकाऊपन काफी कम होता था। जहाँ डामर

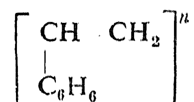
की सड़कें लगभग 5 वर्ष तक चलती थीं, वहीं तारकोल द्वारा बनी सड़कें 1-2 साल में ही क्षतिग्रस्त होने लगती थीं। स्वामीनाथन तथा शुक्ल[1] ने भारत में पाये जाने वाले तारकोल का विस्तृत अध्ययन किया तथा उनका टिकाऊपन जानने के लिए एक परीक्षण पथ भी राष्ट्रीय राजमार्ग नं० 2 पर बनाया। इस अध्ययन से यह विदित हुआ कि प्रयोगशाला और परीक्षण पथ के फल काफी समान हैं। अध्ययन द्वारा यह भी विदित हुआ कि तारकोल में जलवायु की दृष्टि से ऐन्थ्रासीन तेल की मात्रा, जो व्यवहार में काफी महत्त्वपूर्ण है, कम है अतएव तारकोल के गुणों में सुधार लाने के लिए उन्होंने पिच और ऐन्थ्रासीन तेल के अनुपात पर बल दिया और परीक्षण पथ द्वारा यह सिद्ध कर दिया कि यदि तारकोल में यह अनुपात 2-3 कर दिया जाय तो वह डामर के समान टिकाऊ हो जाता है।

तारकोल का दूसरा अवगुण यह पाया गया कि काफी कम ताप पर यह तरल होकर सड़क की सतह पर बहने लगता है। डामर की तुलना में इसकी चिपचिपाहट अधिक होती है। इस समस्या को हल करने के लिये डामर/तारकोल मिश्रण पर अनुसंधान प्रारम्भ किये गये। इस प्रकार के मिश्रण में डामर तथा तारकोल दोनों के पृथक्-पृथक् गुण एक ही पदार्थ (मिश्रण) में प्राप्त हो जाते हैं परन्तु इसके मिलाने के अपने कुछ नियम हैं। चूँकि तारकोल डामर में उपस्थित तेलों में घुलनशील नहीं है अतएव डामर में उपस्थित तेल की मात्रा जितनी कम होगी दोनों की परस्पर घुलनशीलता अधिक होगी। इसके अतिरिक्त तारकोल में पाये जाने वाले कोयले के कण भी काफी बाधक सिद्ध होते हैं। स्वामीनाथन और शुक्ल[1] ने यह सिद्ध किया है कि यदि तारकोल में पिच और ऐन्थ्रासीन तेल का अनुपात 3 से कम कर दिया जाय और डामर 10/20 का प्रयोग किया जाये तो इस प्रकार के मिश्रण किसी भी अनुपात में सरलता से बनाये जा सकते हैं। अन्य पदार्थ जो तारकोल के गुणों को परिवर्तन करने के काम में लाये जाते हैं उनमें एक पॉलीविनाइल क्लोराइड है। यह एथिलीन, ऐसिटिलीन तथा क्लोरीन गैस की रासायनिक अभिक्रिया से तैयार होता है। इसका रासायनिक सूत्र निम्न प्रकार है—



इसके गुण अधिकतर चेन की लम्बाई, अणुभार और बहुलीकरण दशा पर निर्भर करते हैं। लोग्यू-मिल्ले और होबरेच[4] ने सिद्ध किया है कि तारकोल में 0.35 प्रतिशत पॉलीविनाइल क्लोराइड मिला देने से उसकी श्यनता लगभग दुगुनी हो जाती है और 1.4 प्रतिशत मिलाने से यह लगभग 4 गुनी हो जाती है। इसके अतिरिक्त उसकी बन्धशक्ति काफी बढ़ जाती है।

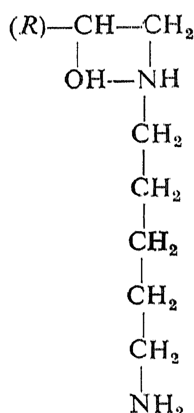
भिसेरे[5] ने तारकोल के गुणों में परिवर्तन लाने के लिए स्टाइरीन पिच का प्रयोग किया। इसके गुण भी इसकी बहुलीकरण दशा पर निर्भर करते हैं। इसका रासायनिक सूत्र इस प्रकार है—C_6H_5-$CH{=}CH_2$। बहुलीकरण द्वारा जो यौगिक बनता है वह है



इसके मिलाने से जो गुणों में परिवर्तन होता है वह निम्न प्रकार है :—

श्यानता काफी बढ़ जाती है, बन्धक शक्ति भी काफी बढ़ जाती है एवं बन्धक शक्ति भविष्य में भी काफी दिनों तक विद्यमान रहती है।

तारकोल के गुण इपाक्सी रेज़िनों से भी परिवर्तित किये जा सकते हैं। इपाक्सी रेज़िन की विशेषता इसमें पाये जाने वाले तत्व $CH-CH_2$ के कारण है जो रासायनिक क्रिया द्वारा $-NH_2$ के स्वयं पॉली-ऐमीन बनता है जिसका सूत्र इस प्रकार है।



चूँकि इपाक्सी रेज़िन एक महँगा पदार्थ है इसलिए इसका उपयोग वहीं करते हैं जहाँ कुट्टिम पर भार सीमित हो।

प्रयोगात्मक

तीन प्रकार के पालीमरों—रबड़, स्टाइरीन पिच तथा पालीस्टाइरीन तारकोल में मिला कर उनका अध्ययन किया गया। चूँकि ये सभी पदार्थ तारकोल में सीधे नहीं मिल पाते अतएव प्रत्येक पदार्थ के मिलाने की विधि भी विकसित की गई जिसका विवरण निम्न प्रकार है।

कोलतार/रबड़ मिश्रण—प्रकृति में रबड़ लैटेक्स रूप में पाई जाती है जिसमें लगभग 60% जल तथा 40% ठोस रबड़ होती है। लैटेक्स को तारकोल में मिलाने में काफी कठिनाई होती है इसलिए रबड़ का अर्द्ध आक्सीकृत चूर्ण प्रयोग में लाते हैं। इस प्रकार का चूर्ण अभी तक भारत में उपलब्ध नहीं है। इस अध्ययन के लिए यह चूर्ण मलेशिया से आयात किया गया था जिसे रोडो रब कहते हैं। गर्म तारकोल में इस चूर्ण को समुचित मात्रा में मिलाकर उसको तब तक मथते हैं जब तक कि वह सारे तारकोल में समान रूप से मिल न जाय। रोड़ी के साथ इसको उसी प्रकार मिलाया जाता है जैसे कि आम तारकोल के साथ किया जाता है।

तारकोल स्टाइरीन पिच मिश्रण : स्टाइरीन पिच कृत्रिम रबड़ कारखानों से निकाला हुआ एक निरर्थक पदार्थ है जिसमें रबड़ के कुछ गुण मौजूद रहते हैं। यह तारकोल से सीधे नहीं मिलता अतएव इसे पहले कोलतार से प्राप्त तेल (एन्थ्रासीन तेल) में घुला लेते हैं और इसके पश्चात् उसे तारकोल में मिलाते हैं। चूँकि तारकोल और स्टाइरीन दोनों ही ऐन्थ्रासील तेल में घुलनशील हैं अतएव उनके मिलाने में कोई कठिनाई नहीं होती है।

तारकोल/पालीस्टाइरीन मिश्रण : पालीस्टाइरीन कारखानों से निकला हुआ एक निरर्थक पदार्थ है जो कि छोटे-छोटे टुकड़ों में पाया जाता है। यह स्टाइरीन की अपेक्षा कठोर होता है। तारकोल के साथ इसका मिश्रण भी उसी प्रकार तैयार करते हैं जैसे स्टाइरीन का परन्तु अन्तर इतना है कि मिलाने के पूर्व इसे ऐन्थ्रासीन तेल में 24-48 घण्टे तक रखना पड़ता है। चूँकि पालीस्टाइरीन के मिलाने से तारकोल गाढ़ा हो जाता है इसलिए उसमें निश्चित तरलता लाने के लिए ऐन्थ्रासीन या क्रियोजोट तेल मिलाते हैं।

परिणाम तथा विवेचना

तुल्यश्यान ताप : प्रारम्भिक तारकोल की सघनता कोलतार–3 के स्तर पर रखी गई थी जिसका तुल्यश्यान ताप 45° से० था। प्रयोगों द्वारा पाया गया कि 2 प्रतिशत रबड़ मिला देने से तुल्यश्यान ताप में 1° से० की वृद्धि होती है परन्तु उसी मात्रा में स्टाइरीन पिच मिलाने से तुल्यश्यान ताप में 2° से० वृद्धि हो जाती है। तुल्यश्यान ताप में अधिकतम प्रभाव पालीस्टाइरीन पिच मिलाने से पड़ता है। केवल 2 प्रतिशत पालीस्टाइरीन मिला देने में तुल्यश्यान ताप 4° से० बढ़ जाता है। परन्तु स्टाइरीन या पाली-स्टाइरीन की मात्रा को 2 प्रतिशत से अधिक बढ़ाने पर भ्रमात्मक फल प्राप्त होता है। तुल्यात्मक ताप बढ़ने के बजाय घट जाता है जो इस बात को सूचित करता है कि या तो स्टाइरीन में पाये जाने वाले तेल उसकी श्यानता को कम कर देते हैं या फिर स्टाइरीन या पालीस्टाइरीन पूर्ण रूप से मिश्रित नहीं हो पाते।

श्यानता : पालीस्टाइरीन और स्टाइरीन का यद्यपि तुल्यश्यान ताप और मृदुकरण ताप पर अधिक प्रभाव नहीं पड़ता परन्तु श्यानता में इसका विशेष प्रभाव देखने को मिलता है। केवल 1 प्रतिशत रोडोरब मिलाने से तारकोल की श्यानता लगभग डेढ़गुनी बढ़ जाती है। 2 प्रतिशत स्टाइरीन या पालीस्टाइरीन मिलाने से श्यानता में क्रमशः दो गुना और ढाईगुना की वृद्धि हो जाती है। अधिक मात्रा मिलाने से भ्रमात्मक तथ्य सामने आते हैं।

तन्यता : तन्यता सड़क निर्माण में एक महत्त्वपूर्ण गुण है। यद्यपि तारकोल की तन्यता लगभग 100 सेमी० होती है किन्तु अधिक खींचने पर तार पानी में बैठने लगता है अतएव पालीमर के गुणों में तन्यता को केवल प्रारम्भिक दशा में तार की मोटाई से परखा जा सकता है। सर्दियों में सड़क की सतह पर दरारें न पड़ना इस बात का सूचक है कि पालीमर मिला देने से तन्यता में काफी सुधार होता है।

यान्त्रिक गुण : रबड़, स्टाइरीन तथा पालीस्टाइरीन के मिलाने का वास्तविक लाभ तारकोल/रोड़ी मिश्रण के यान्त्रिक गुणों से प्रदर्शित होता है। केवल 2 प्रतिशत रबड़ चूर्ण मिला देने से मार्शल स्थायित्व

730 पौंड से बढ़कर 1025 पौंड हो जाता है। स्टाइरीन द्वारा यह वृद्धि लगभग 1.6 गुनी हो जाती है परन्तु पालीस्टाइरीन का प्रभाव सबसे अधिक पाया जाता है अर्थात् 2 प्रतिशत पालीस्टाइरीन मिला देने से स्थायित्व 730 पौंड से बढ़कर 1225 पौंड हो जाता है और इस प्रकार यह वृद्धि बढ़कर 1.7 गुनी हो जाती है। अतएव स्टाइरीन पिच का महत्वपूर्ण लाभ इन यांत्रिक गुणों से प्रकट होता है जब कि अन्य प्रयोगों में यह उतना परिलक्षित नहीं हो पाता।

तारकोल/पालीमर मिश्रण के गुण सारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

क्र० सं०	पदार्थ का नाम	मृदुकरण अंक	तुल्य श्यानता ताप से०	श्यानता 60° से० पर	घनत्व	मार्शल स्थायित्व (पौं०)	बहाव* 1/100″
1.	कोलतार–3	25	45	1.6 × 10	2.381	730	12
2.	कोलतार–3 + 1% रबड़	23.7	46.5	2.3 × 10	2.364	986	12
3.	कोलतार–3 + 2% रबड़	23.8	46	2.15 × 10	2.361	1025	12
4.	कोलतार–3 + 2% स्टाइरीन	23.4	47	3.1 × 10	2.386	1159	12
5.	कोलतार–3 + 4% स्टाइरीन	23.7	44	1.65 × 10	2.374	769	12
6.	कोलतार–3 + 2% पोलीस्टाइरीन	28.5	49	4.0 × 10	2.369	1225	12
7.	कोलतार–3 + 4% पोलीस्टाइरीन	23.0	46	3.1 × 10	2.351	1060	12

*तन्यता—तार नीचे बैठ गया।

उपसंहार

(1) कोलतार में रबड़, स्टाइरीन तथा पालीस्टाइरीन एक विशेष विधि द्वारा किसी भी अनुपात में मिलाये जा सकते हैं।

(2) केवल 2 प्रतिशत रबड़, स्टाइरीन या पालीस्टाइरीन को तारकोल में मिलाने से उसके तुल्यश्यान ताप में यद्यपि अधिक परिवर्तन नहीं होता परन्तु उसकी श्यानता लगभग दुगुनी हो जाती है।

(3) इन पालीमर का तारकोल/रोड़ी मिश्रण के यांत्रिक गुणों में विशेष प्रभाव पड़ता है केवल 2 प्रतिशत पालीमर के मिला देने से मार्शल स्थायित्व लगभग डेढ़गुना बढ़ जाता है।

(4) पालीमर के मिलाने से सड़क निर्माण की लागत में लगभग 15-20 प्रतिशत की बृद्धि हो जाती है परन्तु सड़क की उपयोगिता तथा टिकाऊपन की बृद्धि को ध्यान में रखते हुए लागत में यह बृद्धि अधिक नहीं है।

(5) विशिष्ट स्थानों जैसे बस अड्डों तथा उन स्थानों पर जहाँ गाड़ियों से तेल अधिक मात्रा में सड़क पर गिरता है तारकोल/पालीमर मिश्रण का विशेष महत्व है क्योंकि ये मिश्रण गाड़ियों से गिरने वाले तेल में घुलनशील नहीं है जबकि अकेला डामर या तारकोल इन तेलों में घुलनशील है।

निर्देश

1. स्वामीनाथन, सी० जी० तथा शुक्ल, आर० एस०, **इन्टरनेशनल रोडटार कान्फ्रेन्स** 1959
2. टिंगल, ई० डी०, **इन्टरनेशनल रोडटार कान्फ्रेन्स** 1965
3. एनसर्ट, आर०, **इन्टरनेशनल रोडटार कान्फ्रेस** 1965
4. होबरेच. एल० तथा लौग्यूमिल्ले, पी०, **इन्टरनेशनल रोडटार कान्फ्रेन्स** 1965
5. मिसेरे, आ० **इन्टरनेशनल रोडटार काफ्रेन्स** ,फ्रान्स 1965
6. फीवेच, एम०, **इन्टरनेशनल रोडटार कान्फ्रेन्स**, 1965

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 139-143

वियोजित पान की पत्ती पर 6-फरफ्यूरिल ऐमीनो प्यूरीन (काइनेटिन) का प्रभाव

कन्हैया लाल

डिवीजन ऑफ फिजियोलाजी एण्ड बायोकेमिस्ट्री,
उ० प्र० गन्ना-शोध परिषद्, शाहजहाँपुर

तथा

आर० एल० मिश्र

स्वायल कन्जरवेशन कार्यालय, दरियाबाद, बाराबंकी

[प्राप्त—जनवरी 1, 1982]

सारांश

24 घंटे तक काइनेटिन (15mg/l) के बाह्य प्रयोग से प्रकाश (2500 लक्स) तथा अन्धकार में रखी गयी सवृन्त तथा अवृन्त पान की पत्ती में ऐमीनो अम्ल, प्रोटीन, नाइट्रोजन, सम्पूर्ण नाइट्रोजन, पर्णहरित में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन किया गया। आँकड़ों से यह मालूम हुआ कि अवृन्त पत्तियों में सवृन्त पत्ती की तुलना में प्रकाश एवं अन्धकार परिस्थितियों में कम ऐमीनो अम्ल एकत्रित हुआ जिससे दोनों प्रकार की पत्तियों में विशेषकर प्रकाश में कम जीर्णता (senescence) विकसित पायी गयी। काइनेटिन-उपचारित पत्तियों में पर्णहरित, प्रोटीन एवं सम्पूर्ण नाइड्रोजन नियन्त्रण से अधिक पाये गये। प्रकाश की स्थिति विशेषकर लाभप्रद रही अतः पर्ण से वृन्त के अलगाव एवं काइनेटिन (15mg/l) के पर्णीय छिड़काव करने से पान प्रजाति मघई में उत्पन्न जीर्णता को अवरोधित किया गया।

Abstract

Effect of 6-furfurylaminopurine (kinetin) on detached leaves of betel (piper betel var. 'Maghai'). *By* Kanhaiya Lal, Division of Physiology and Biochemistry, U. P. Council of Sugarcane Research, Shahjahanpur and R. L. Misra, Soil Conservation Office, Daryabad, Barabanki (U.P.).

The effect of exogenous application of kinetin (15mg/l) for a period of 24 hours on detached betel leaves with and without petioles under the conditions of light

(2500 lux) and dark on the variations in amino acids, protein-N, total-N and chlorophyll was evaluated. The data indicated that the accumulation of amino acids in depetiolated laminae was lesser as compared to petiolated leaves under light and dark conditions. Senescence was comparatively much marked in both petiolated and depetiolated laminae under dark conditions. Protein-N, total-N and chlorophyll were registered more in kinetin treated laminae (with and without petioles) particularly under light conditions. Therefore, the removal of petioles and the foliar application of kinetin effectively delayed the onset of senescence in betel leaves.

पौधों में वृद्धि एवं विकास के पश्चात् जीर्णता और मृत्यु की अवस्था आती है। वास्तव में यह प्रक्रम, पौधे की दीर्घता को ध्यान में रखते हुए, अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। वियोजित पत्ती के उपापचय पर चिबनाल[1], बीकरी आदि[2], रंजन एवं लैलोरिया[3] द्वारा प्रकाश डाला जा चुका है। काइनेटिन उपचारित तम्बाकू की पत्ती के हिस्से में सांकेतिक ऐमीनो अम्ल संचित होता है। वहाँ उपापचयी पदार्थ एकत्रित होकर पत्ती की जीर्णता को कम करते हैं।[4] भारतवर्ष में छोटे और बड़े सभी लोग पान की पत्ती का प्रयोग करते हैं। अतः यह नितान्त आवश्यक है कि पत्ती को किस प्रकार संग्रहीत किया जाय जिससे पत्ती बिना जीर्णता के अत्यधिक समय तक ठीक हालत में बनी रहे।

प्रस्तुत शोध-पत्र में जीर्णता के नियन्त्रण हेतु काइनेटिन प्रयोग तथा पान के पर्णवृन्त को छिन्न करने से पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

पूर्णविकसित, समान, हरे, स्वस्थ पान (*Piper betel* var. 'Maghai') की पत्ती को सूर्योदय के पूर्व तोड़कर दो समूहों में एकत्रित किया गया (i) प्रथम समूह जिसमें पत्तियों में वृन्त (petiole) लगे हुये थे, (ii) द्वितीय समूह जिसमें पत्तियों के वृन्त को अलग कर दिया गया था (depetiolated leaves)। पर्ण-वृन्त तथा बिना वृन्त के पत्तियों को अलग-अलग काइनेटिन (15mg/l) के 10 मिली० घोल से 24 घंटे तक उपचारित किया गया। साथ ही साथ नियन्त्रण (कन्ट्रोल) को आसुत जल से भिगोकर पत्तियाँ रखी गयीं। उपचारित पत्तियों को अलग-अलग प्रकाश तथा अन्धकार में रखा गया। इस प्रयोग में प्रकाश को कृत्रिम रूप से 2500 लक्स (lux) उपलब्ध कराया गया था, जबकि अन्धकार का प्रभाव देखने हेतु न्यादर्शों सहित पेट्रीडिशों को अन्धकार कक्ष में ($22\pm2°$ से०) पर रखा गया था। उपचार के तत्पश्चात् पत्तियों को ओवेन में 24 घंटे के लिए 80° से० पर रखकर सुखा लिया गया और उसमें ऐमीनो अम्ल[5] पर्णहरित[6] तथा प्रोटीन एवं सम्पूर्ण नाइट्रोजन[7] का विश्लेषण किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

पौधे की वियोजित पत्ती की जीर्णता के समय, पर्णहरित और क्लोरोप्लास्टिक प्रोटीन तेजी के साथ टूटने लगते हैं। पौधे से अलग किये हुये पत्ती या उसके छोटे से छोटे हिस्से में काइनेटिन, पर्णहरित, डी० एन० ए० (DNA), आर० एन० ए० (RNA) एवं प्रोटीन में होने वाली कमी को रोकता है। मोथेस[8] ने देखा कि तम्बाकू की पत्ती में काइनेटिन का मुख्य प्रभाव ऐमीनो अम्ल को आकर्षित करना

है। तम्बाकू की पत्ती की डिस्क में काइनेटिन को न्यूक्लिक अम्ल और प्रोटीन संश्लेषण को बढ़ावा एवं स्तम्भ के ऊतक में प्रोटीन संश्लेषण को उत्तेजित करते हुये पाया गया था।

जब प्रकाश तथा अन्धकार की स्थिति में वियोजित पत्ती को काइनेटिन के घोल में तैराया गया तो वास्तविक गहरा हरा रंग नियन्त्रण की तुलना में धीमी गति से पीले रंग में परिवर्तित हुआ। जीर्णता का लक्षण पूर्णतः पीलापन ही माना गया था। प्रकाश में वियोजित वृन्त सहित पत्ती में ऐमीनो अम्ल 1900 μg था, जबकि बिना वृन्त की पत्ती में मात्र 1630 μg पाया गया (सारिणी 1)। अन्धकार में बिना

सारणी 1

वियोजित पान की पत्ती में ऐमीनो अम्ल, पर्णहरित, प्रोटीन एवं सम्पूर्ण नाइट्रोजन पर काइनेटिन का प्रभाव

प्रकाश/अन्धकार	सवृन्त पत्ती			अवृन्त पत्ती		
	नियन्त्रण	काइनेटिन	नियन्त्रण से ऊपर % वृद्धि (+) या ह्रास (−)	नियन्त्रण	काइनेटिन	नियन्त्रण के ऊपर % वृद्धि (+) या ह्रास (−)
ऐमीनो एसिड (ग्रा०/100 मिग्रा० शुष्क पदार्थ)						
प्रकाश	1900	1610	−15.26	1630	1240	−23.92
अन्धकार	1950	1500	−23.07	1340	1260	− 5.97
पर्णहरित (मिग्रा०/ग्रा० शुष्क पदार्थ)						
प्रकाश	43.30	57.60	+31.5	58.30	73.50	+ 2.6
अन्धकार	40.90	60.70	+48.4	48.80	63.60	+ 3.0
प्रोटीन नाइट्रोजन (मिग्रा०/100 मिग्रा० शुष्क पदार्थ						
प्रकाश	5.0	6.0	+20.0	5.0	6.0	+ 3.4
अन्धकार	4.7	5.9	+25.5	5.0	6.0	+20.0
सम्पूर्ण नाइट्रोजन (मिग्रा०/100 मिग्रा० शुष्क पदार्थ)						
प्रकाश	8.8	10.2	+15.8	10.5	11.0	+ 4.5
अन्धकार	8.9	10.2	+ 3.3	10.2	10.4	+ 1.9

वृन्त वाली पत्ती में बृन्तसहित पत्ती की तुलना में कम ऐमीनो अम्ल एकत्रित हुआ। 24 घंटे प्रकाश में काइनेटिन से उपचारित बिना वृन्त वाली पत्ती में 1240 μg ऐमीनो अम्ल और वृन्त वाली पत्ती में मात्र 1610 μg ऐमीनो अम्ल पाया गया। सामान्यतया 24 घंटे काइनेटिन के उपचार एवं पत्ती से वृन्त के अलगाव की स्थिति में ऐमीनो अम्ल कम पाया गया। मिश्रा तथा किसवाल[9] तथा गनिंग तथा बार्कले[10] द्वारा भी इस प्रकार के परिणाम पाये जा चुके हैं।

प्रयोग की प्रत्येक स्थिति में काइनेटिन पर्णहरित को बढ़ाता है। प्रकाश की स्थिति में काइनेटिन के सम्पर्क में वृन्त सहित पत्ती में 31.5% और बिना वृन्त की पत्ती में 2.6% पर्णहरित की वृद्धि हुई। साथ ही साथ अन्धकार में भी 48.4 एवं 30% पर्णहरित की वृद्धि हुई। काइनेटिन के सम्पर्क में जब पर्णहरित बढ़ता है तब ऐमीनो अम्ल कम होता है।[11,12]

प्रकाश की स्थिति में, काइनेटिन द्वारा वृन्तसहित पत्ती में प्रोटीन नाइट्रोजन में 20.0 प्रतिशत तथा बिना वृन्त की पत्ती में 3.4 प्रतिशत तथा अन्धकार में क्रमशः 25.5 और 20.0% वृद्धियाँ हुईं। प्रोटीन नाइट्रोजन की भाँति काइनेटिन की उपस्थिति में सम्पूर्ण नाइट्रोजन की भी वृद्धि हुई। इसी प्रकार का परिणाम बीकरी आदि[2] और चिबनाल[1] द्वारा पाया गया है अतः काइनेटिन के उपचार एवं वृन्त के अलगाव से पान की पत्ती में होने वाली जीर्णता में अवरोध उत्पन्न हुआ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रोफेसर के० मोथेस, डाइरेक्टर, इन्स्टीट्यूट बायोकेमी डर प्लेन्जन, डी० डी० आर० 401, हैले (साले) ईस्ट जर्मनी के प्रस्तुत शोध-कार्य की मान्यता एवं बहुमूल्य सुझावों के लिये लेखकगण हृदय से आभारी हैं।

निर्देश

1. चिबनाल, ए० सी०, **प्रोटीन मेटाबालिज्म इन द प्लान्ट**, प्रकाशित येल यूनीवर्सिटी प्रेस, न्यू हैवेन, यू० एस० ए०, 1939
2. बीकरी, एच० बी०, पुचार, जी० डब्लू०, बैकमैन, ए० जे० तथा लैवनवर्थ, सी० एस०, **कनेक्टीकट एग्री० एक्स० स्टे०** (न्यू हैवेन) बुलेटिन, 1935, **374**, 557
3. रंजन, श्री तथा लैलोरिया, एम० एम०, **प्लान्ट फिजी०**, 1960, **35**, 714-725
4. मोथेस, के० तथा एलिब्रेस्ट, एल०, **रेसेन्ट एडवान्सेज इन बाटनी**, यूनिवर्सिटी आफ टोरान्टो प्रेस, 1961, **11**, 518
5. सिंह, ए०, **प्रैक्टीकल प्लान्ट फिजियालोजी**, कल्यानी पब्लिसर्स, नई दिल्ली, 1977
6. अरनन, डी० आई०, **प्लान्ट फिजी०**, 1949, **24**, 1-5

7. मारखम, आर०, **बायो० जर्न०**, 1942, **36**, 790

8. मोथेस, के०, Naturwissenchaften, 1960, **47**, 337

9. मिश्रा, जी० तथा बिसवल, यू० सी०, **बाटनी गजेट**, 1973, **134**, 5-11

10. गनिंग, बी० ई० एस० तथा वार्कले, डब्लू० डब्लू०, **नेचर**, 1963, **199**,262-265

11. सुगीयूरा, एम०, यूमीम्यूरा, के० तथा बूटावाई, **फिजी० पलैन्टेरम**, 1962, **15**,457

12. लाल, के०, **नेश० एके० साइंस लेटर्स**, 1981, **4**, 57-61

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 145-149

$(N, p_n^{(\alpha)})$ विधि द्वारा फूरियर श्रेणी की संकलनीयता

के० एन० मिश्र
गणित विभाग, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—जुलाई 1, 1980]

सारांश

कई कार्यकर्ताओं ने फूरियर श्रेणी की $(H, 1)$ तथा (N, p_n) संकलनीयता की विवेचना की है। प्रस्तुत प्रपत्र में हम $\left\{N, p_n^{(\alpha)}\right\}$ संकलनीयता को लेकर उपर्युक्त परिणामों को आगे बढ़ावेंगे।

Abstract

On the summability of Fourier series by $(N, p_n^{(\alpha)})$ method. *By* K. N. Mishra, Department of Maths, Banaras Hindu University, Varanasi.

The $(H, 1)$ and (N, p_n) summability of Fourier series have been discussed by a number of workers viz. Iyenger[2], Siddiqui[5], Pati[4], Singh[6] and Izumi[3]. In the present note we shall extend the above results by taking $(N, p_n^{(\alpha)})$ summability, which i s more general than the previous results.

1. परिभाषा[1]

श्रेणी Σa_n आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ के अनुक्रम सहित S के प्रति नारलुंड विधि

$$(N, p_n^{(\alpha)}),\ \alpha > -1,$$

के द्वारा समाकलनीय कहलाती है यदि

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{(\alpha)} \to s \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty,$$

जहाँ
$$t_n^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{p_{n-\nu}^{(\alpha)} S_\nu}{p_n^{(\alpha)}} (p_n^{(\alpha)} \neq 0)$$

तथा
$$p_n^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{(\alpha)}.$$

$d=1$ के लिए यह विधि संकलन की विधि (N, p_n) में समानीत हो जाती है।

$p_n = \frac{1}{n-1}$, होने के प्रसंग में विधि (N, p_n) परिचित हार्मोनिक संकलनीयता $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$ हो जाती है। पुनश्च,

$$p_n = \binom{n+\delta-1}{\delta-1}, \ \delta > 0$$

के लिये नारलुंड माध्य (N, p_n) (C, δ) में समानीत हो जाता है।

2. माना $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और $(-\pi, \pi)$ से होकर समाकलनीय (L) है। इस फलन से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी (2.1) है।

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + bn \sin nx) \tag{2.1}$$

हम लिखेंगे
$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]$$
$$\phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)| \, du$$
$$\tau = [1/t]$$

हम $(0, \infty)$ पर $p^{(\alpha)}$ को परिभाषित करेंगे जिससे

$$p^{(\alpha)}(n) = p_n^{(\alpha)} \text{ for } n=1, 2, \dots \text{ के लिए}$$

तथा यह कि $p^{(\alpha)}(t)(0, \infty)$ पर संतत है और प्रत्येक $(k, k+1)$ $k=0, 1, \dots,$ पर रैखिक है।

यदि हम
$$P_t^{(\alpha)} = \int_0^t p^{(\alpha)}(u) du$$
रखें तो
$$P_n^{(\alpha)} = \tfrac{1}{2} p_0^{(\alpha)} + p_1^{(\alpha)} + \dots + \tfrac{1}{2} p_n^{(\alpha)} \cong P_n^{(\alpha)}. \quad \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty,$$

जहाँ $P_n^{(\alpha)} \to \infty$ तथा $p_n^{(\alpha)} | P_n^{(\alpha)} \to 0.$

3. हम निम्नलिखित प्रमेय की स्थापना करेंगे।

प्रमेय : माना$\{ p_n^{(\alpha)} \}$ एक ऐसा धनात्मक अनुक्रम है कि $p_n^{(\alpha)} \to \infty$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तथा

$$\int_1^n u \left| \frac{d}{du}(p_n^{(\alpha)}) \right| du = O(p_n^{(\alpha)}) \tag{3.1}$$

तो यदि

$$\int_t^{\delta} \frac{|\varphi(u)|}{u} P_{(1/u)}^{(\alpha)} du = O[P_{\tau}^{(\alpha)}] \tag{3.2}$$

$$0 < \delta < \pi \text{ ज्यों ज्यों } t \to +0,$$

तो फूरियर श्रेणी (2.1) $f(x)$ तक संकलनीय $(N, P_n^{(\alpha)})$ है।

द्रष्टव्य है कि हमारे प्रमेय का प्रतिबन्ध (3.1) $\{ p_n^{(\alpha)} \}$ की अपेक्षा अधिक व्यापक है। यदि $\{ P_n^{(\alpha)} \}$ एकदिष्ट हो तो (3.1)

$$n p_n^{(\alpha)} = 0[P_n^{(\alpha)}] \tag{3.3}$$

के समतुल्य है। यदि $\{ p_n^{(\alpha)} \}$ ह्रासमान हो तो (3.3) की तुष्टि होती है, अतः समाकल (3.1) $\Rightarrow$ (3-3)

पुनः; (3.2) से

$$\phi(t) = o[p_{\tau}^{(\alpha)} / \mathrm{P}_{\tau}^{(\alpha)}] \tag{3.4}$$

प्रमेय की उपपत्ति

यह भलीभाँति ज्ञात है कि श्रेणी (2.1) के nवें आंशिक योगफल $S_n(x)$ को

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin (n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt + f(x),$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अतः $(N, p_n^{(\alpha)})$ विधि की परिभाषा से

$$t_n^{(\alpha)}(x)-f(x)=\frac{1}{p_n^{(\alpha)}}\sum_{k=0}^{n} p_k^{(\alpha)}[S_{n-k}^{(x)}-f(x)]$$

$$=\frac{1}{2\pi P_n^{(\alpha)}}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi P_n^{(\alpha)}}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sin\frac{1}{2}t}L_n(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi P_n^{(\alpha)}}\left[\int_0^{n^{-1}}+\int_{n^{-1}}^{\pi}\right]\frac{\varphi(t)}{\sin\frac{1}{2}t}L_n(t)dt$$

$$=1/\pi\,(I+J),\ \text{(माना)}$$

अब $0<t\leqslant n^{-1}$ में समान रूप से

$$\frac{1}{P_n^{(\alpha)}}\sum_{k=0}^{n} p_k^{(\alpha)}\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}=O(n)$$

अतः
$$I=O\left[n\int_0^{n^{-1}}|\varphi(u)|du\right]$$

$$=o(1),\ (3.4)\ \text{से}$$

हम लिखेंगे कि

$$|L_n(t)|\leqslant\sum_{k=0}^{\tau}p_k^{(\alpha)}+\sum_{k=\tau}^{n}p_k^{(\alpha)}\sin(n-k+\tfrac{1}{2})t$$

$$=L_n'(t)+L_n''(t)\quad\text{(माना)}$$

अतः
$$|J|=O\,\frac{1}{P_n^{(\alpha)}}\int_{n^{-1}}^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t}L_n'(t)dt+\frac{1}{P_n^{(\alpha)}}\int_{n^{-1}}^{\pi}\frac{\phi(t)}{t}L_n''(t)dt\Bigg]$$

$$=O\left[\frac{1}{P_n^{(\alpha)}}(J_1+J_2)\right],\ \text{(माना)}$$

इसलिए

$$|J_1|=O\left[\int_{n^{-1}}^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t}P_\tau^{(\alpha)}\right]$$

$$=O\,[P_n^{(\alpha)}],\ (3.2)\ \text{से}$$

इसके आगे, (3.4) की सहायता से एवं इजुमी तथा इजुमी[3] के अनुसार क्रिया करने पर

$$|J_2|=O\,[P_n^{(\alpha)}]$$

इस तरह हमें

$$|J_1|=O(1)$$

प्राप्त होता है । अत: प्रमेय सिद्ध हुई ।

निर्देश

1. कास, एफ़०पी०, Math. E., 1969, **112**, 357-63
2. आयंगर, के०एस०के०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1943, **18** 81-87
3. इजुमी, एम० तथा इजुमी, एस०, **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1968, **26**, 289-301
4. पती, टी०, **इण्डियन जर्न० मैथ०**, 1961, **3**, 85-90
5. सिद्दीकी, जे०ए०, **प्रोसी०इँडियन एके०साइँस**, 1948, **26**, 257
6. सिंह, टी०, Ann. Mat. pure appl. 1964, (IV), 123-132

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 151-154

पंडा तथा कानहाउसर द्वारा परिभाषित दो वर्गों के बहुपदों के लिए समेकित निरूपण

एस० के० भार्गव
गणित विभाग, सी० पी० आई० कालेज, झाँसी

[प्राप्त—जुलाई 14, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य पंडा तथा कानहाउसर द्वारा परिभाषित दो वर्गों के बहुपदों के लिए समेकित निरूपण प्राप्त करना है।

Abstract

A unified presentation of two Classes of polynomials defined by R. panda and Kanhauser. *By* S. K. Bhargava, Department of Mathematics, C. P. I. College, Jhansi.

The object of the paper is to unify the study of two classes of polynomials defined by R. Panda and Kanhauser by introducing the polynomials

$$\{h_n^c(x;\, r,\, s,\, k)|n=0,\, 1,\, 2,\, \ldots\}$$

defined by $(1-k)^{-((c+1)-k)}\, G\{xt^s[(1-t)^{-1/k}-1]^r\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^c(x;\, r,\, s,\, k)t^n$

where $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n\, z^n,\ \gamma_0 \neq 0$

1. प्रस्तावना

पंडा ने[1] $\{g_n^c\,(x,\, r,\, s)|n=0,\, 1,\, 2,\ldots\}$ को चिरप्रतिष्ठित जैकोबी, हर्माइट तथा लागेर बहुपदों के परिवार से सम्बन्धित कई बहुपद निकायों के सार्वीकरण के रूप में रखा है। उन्होंने

$g_n^c(x,\, r,\, s)$ को

$$(1-t)^{-c}G\left[\frac{xt^s}{(1-t)^r}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} g_n^c(x, r, s)t^n \tag{1.1}$$

द्वारा परिभाषित किया है जहाँ

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n, \gamma_0\neq 0 \tag{1.2}$$

तथा c एक यादृच्छिक प्राचल है, r कोई धन या ऋण पूर्णाङ्क है जिसके साथ $s=1, 2, 3,...$ ।

कानहाउसर[2] ने दूसरे प्रकार के द्वि-लाम्बिक बहुपदों $y_n^c(x; k)$ को

$$(1-t)^{-((c+1)/k)} exp\{-x[(1-t)^{-1/k}-1]\}=\sum_{n=0}^{\infty} y_n^c \ (x; k)t^n \tag{1.3}$$

द्वारा परिभाषित किया है। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उपर्युक्त दोनों प्रकार के बहुपदों का समेकन है जिसके लिए बहुपदों

$$\{h_n^c(x; r, s, k)|n=0, 1, 2,...\}$$

का समावेश किया गया है जिसे (1.4) द्वारा परिभाषित किया जाता है

$$(1-t)^{-((c+1)/k)} G\{xt^s[(1-t)^{-1/k}-1]^r\}=\sum_{n=0}^{\infty} h_n^c \ (x; r, s, k)t^n \tag{1.4}$$

जहाँ $G(z)$ (1.2) के समान है। (1.4) से हम (1.3) प्राप्त कर सकते हैं यदि

$$\gamma_n=\frac{1}{n!}, s=0, r=1$$

तथा x को $-x$ से प्रतिस्थापित किया जाता है और (1.1) की प्राप्ति होती है यदि $k=1$ तथा c को $(c-1)$ द्वारा और s को $s-r$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है।

2. स्पष्ट रूप : (1.4) तथा (1.2) के पुनरावेदन से हमें निम्नलिखित स्पष्ट रूप प्राप्त होता है

$$h_n^c \ (x; r, s, k)=\sum_{m=0}^{[n/s]} \left(\frac{c+1+p}{k}\right)_{n-sm} \frac{\gamma_m x^m}{(n-sm)!}\sum_{p=0}^{rm}(-1)^{rm-p}\binom{rm}{p} \tag{2.1}$$

3. अवकल समीकरण : यदि हम

$$F=(1-t)^{-(c+1)/k} G\{xt^s[(1-t)^{-1/k}-1]^r\} \tag{3.1}$$

लें तो सरलता के साथ पुष्टि की जा सकती है कि

$$x\left[s+\left\{\frac{r}{k[1-(1-t)^{1/k}]}-s\right\} t \ \right]\frac{\partial F}{\partial x} -t(1-t) \ \frac{\partial F}{\partial t} =-\left(\frac{c+1}{k}\right)tF. \tag{3.2}$$

4. कतिपय सम्बन्ध : स्पष्ट रूप (2.1) से एक और जनक सम्बन्ध प्राप्त होता है जो इस प्रकार है

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{c-nk}(x; r, s, k)t^n = (1+t)^{((c+1)/k-1)} G\left[x\left(\frac{t}{1+t}\right)^s \{(1+t)^{1/k}-1\}^r\right] \qquad (4.1)$$

अब (1.4) का उपयोग करने से

$$h_n^c(x; r, s, k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(\frac{c-b}{k}\right)_m h_{n-m}^b(x; r, s, k). \qquad (4.2)$$

(1.4) में t को $u/1+u$ द्वारा और (4.1) में c को $c+k$ द्वारा प्रतिस्थापित करने से हमें क्रमशः

$$\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{-((c+1)/k)} G\left\{x\left(\frac{u}{1+u}\right)^s\left[\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{-1/k}-1\right]^r\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} h_n^c(x; r, s, k)\left(\frac{u}{1+u}\right)^n \qquad (4.3)$$

तथा

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{c+k-nk}(x; r, s, k)u^n = (1+u)^{((c+1)/k)} G\left[x\left(\frac{u}{1+u}\right)^s\{(1+u)^{1/k}-1\}^r\right], \qquad (4.4)$$

प्राप्त होते हैं जिनसे अनुगमन होता है कि

$$h_n^{c-(n-1)k}(x; r, s, k) = \sum_{m=0}^{n-1}(-)^m\binom{n-1}{m} h_{n-m}^c(x; r, s, k), \qquad (4.5)$$

जो c के स्थान पर $c-k+nk$ रखने पर

$$h_n^c(x; r, s, k) = \sum_{m=0}^{n-1}(-)^m\binom{n-1}{m} h_{n-m}^{c-k+nk}(x; r, s, k) \qquad (4.6)$$

प्रदान करता है। इसी प्रकार (1.4) में c को $c-k$ से और (4.1) में t को $u/1-u$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$h_n^{c-k}(x, r, s, k) = \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m} h_{n-m}^{c-(n-m)k}(x; r, s, k,) \qquad (4.7)$$

प्राप्त होता है जिससे c के स्थान पर $c+k$ रखने पर (4.8) की प्राप्ति होती है।

$$h_n^c(x; r, s, k) = \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m} h_{n-m}^{c+k-(n-m)k}(x; r, s, k) \qquad (4.8)$$

यदि हम (4.1) में c को $c+b$ से और अन्त में c को $c+nk$ से प्रतिस्थापित करा दें तो

$$h_n^{c+b}(x; r, s, k)=\sum_{m=0}^{n}\binom{b/k}{m}h_{n-m}^{c+mk}(x; r, s, k) \tag{4.9}$$

जो $c=0$ होने पर इससे आगे (4.10) प्रदान करता है

$$h_n^{b}(x; r, s, k)=\sum_{m=0}^{n}\binom{b/k}{m}h_{n-m}^{mk}(x; r, s, k) \tag{4.10}$$

पुनः (1.4) में c के स्थान पर $c-bk$ रखने पर

$$h_n^{c}(x; r, s, k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(b)m}{m!}h_{n-m}^{c-bk}(x; r, s, k) \tag{4.11}$$

और यदि हम c के स्थान पर $c+k$ रखें तो

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}h_n^{c+k}(x; r, s, k)t^n=(1-t)^{-((c+1)/k)}G\{xt^s[(1-t)^{-1/k}-1]^r\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}h_n^{c}(x; r, s, k)t^n$$

जो दोनों पक्षों में t^n के गुणांक को समीकृत करने पर एक आवर्ती सम्बन्ध (4.12)

$$h_n^{c+k}(x; r, s, k)-h_{n-1}^{c+k}(x; r, s, k)=h_n^{c}(x; r, s, k) \tag{4.12}$$

प्रदान करता है। अन्त में (4.11) और (4.12) का उपयोग करने से निम्नलिखित फल प्राप्त होता है।

$$h_n^{c+k}(x; r, s, k)-h_{n-1}^{c+k}(x; r, s, k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(b)m}{m!}h_{n-m}^{c-bk}(x; r, s, k). \tag{4.13}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डी० वी० कालेज, उरई के डा० आर० सी० सिंह चन्देल का कृतज्ञ है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. पंडा, आर०, **ग्लास्गो मैथ० जर्न,०** 1977, **18**, 105-108

2. कानहाउसर, जे० डी० ई०, **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1967, **21** (2), 303-314

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 155-159

एम्पीसिलीन ट्राइहाइड्रेट के साथ Cu(II) तथा Zn(II) के संकुल

तुषारकान्त कटकवार तथा एम० एस० कछवाहा
रसायन विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—अगस्त 26, 1981]

सारांश

कुछ जीवनोपयोगी तत्व जैसे Cu(II) तथा Zn(II) के प्रति एक महत्वपूर्ण पेनिसिलीन औषधि एम्पीसिलीन ट्राइहाइड्रेट का संकुलन व्यवहार अध्ययन किया गया है। 5.5 पी-एच० पर ML_2 संरचना के (जहाँ M=Cu(II) तथा L=एम्पीसिलीन ट्राइहाइड्रेट) संकुल प्राप्त हुए। 1.5 पी-एच० पर भी संकुल बनाने के प्रयत्न किये गये। इस पी-एच० पर केवल Cu(II) अवक्षेपित होता है जो विश्लेषण तथा स्पेक्ट्रम के अध्ययन के आधार पर $CuL(OH)(H_2O)_3$ पाया गया। इस पी-एच० पर Zn(II) के साथ केवल चमकीले पीले-नारंगी रंग का प्रदीप्त विलयन प्राप्त होता है। प्राप्त ठोस संकुलों का अध्ययन विश्लेषण, ग्रामाणु-चालकता, चुम्बकीय घूर्ण, दृश्य स्पेक्ट्रम तथा अवरक्त स्पेक्ट्रम के द्वारा किया गया है।

Abstract

Ampicillin trihydrate complexes with Cu(II) and Zn(II). *By* Tushar Kant Katakwar and M. S. Kachhawaha, Department of Chemistry, University of Sagar, Sagar.

Complexing behaviour of ampicillin, a widely used pencillin, towards some life essential metals [Cu(II) and Zn(II)] have been studied. Complexes of the composition [ML_2] [where M=Cu(II) and Zn(II), L=Ampicillin. $3H_2O$] have been isolated at pH 5.5. The attempts were also made to isolate complexes at pH 1.5. At this pH only Cu(II) precipitated, the composition of which was found to be $CuL(OH)(H_2O)_3$, while Zn(II) remained in the solution with a bright yellow-orange fluorescence. The solid complexes were characterised by analytical data, molar conductance, magnetic moment, visible spectra and IR.

कई रसायनज्ञों[1] का ध्यान इस अभिनव तथ्य की ओर आकर्षित हुआ है कि औषध की तुलना में उसके कई धातु-संकुल अधिक सशक्त होते हैं। विलियम्स[2] की खोज कि कुछ धातु (जिसमें कापर, जिंक, आयरन, कोबाल्ट आदि प्रमुख हैं) जीवन के आवश्यक तत्व हैं, अत्यन्त महत्वपूर्ण है। उपर्युक्त अन्वेषण के कारण औषध-धातु संकुलों के विस्तृत अध्ययन का व्यापक महत्व है। इन संकुलों के संघटन तथा व्यवहार के आधार पर औषध की अमीन-संयोजी आण्विक प्रक्रिया, संग्रह तथा परिवहन की प्रक्रिया ज्ञात की जा सकती है।[3] प्रस्तुत शोधपत्र में लेखकों ने एम्पीसिलीन ट्राइहाइड्रेट के साथ Cu(II) तथा Zn(II) के विभिन्न पी-एच० (5.5 तथा 1.5) पर प्राप्त होने वाले संकुलों का अध्ययन किया है। 5.5 पी-एच० पर Cu(II) तथा Zn(II) दोनों ही अवक्षेपित हो जाते हैं, जबकि 1.5 पी-एच० पर केवल Cu(II) अवक्षेपित होता है तथा Zn(II) केवल पीला-नारंगी प्रतिदीप्त विलयन देता है।

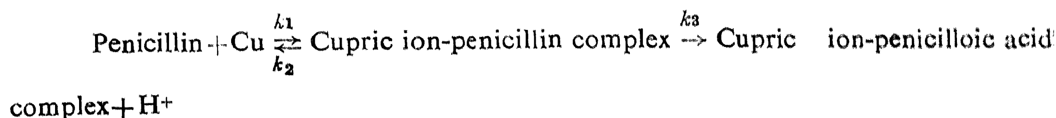
प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन : इफीसिलीन (आई० डी० पी० एल०) के कैप्सूल को काटकर औषध का पुनः क्रिस्टलन विधि[4] द्वारा शुद्धिकरण करके प्रयोग में लाया गया। लीगैण्ड (आविकर) तथा धातु-लवण (1 ग्राम) को क्रमशः 50% ऐल्कोहल तथा आसुत जल की अल्प मात्रा में घोला गया। लीगैन्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ मिलाया गया। विलयन का पी-एच० ऐसीटेट बफर की सहायता से 5.5 पर स्थिर कर, उसे 5°-15°C पर रात्रि भर रहने दिया गया तो Cu(II) से हरित तथा Zn(II) से पीतवर्ण संकुल बना। इस संकुल को अनेक बार ऐल्कोहलोल-जल तथा फिर आसुत जल से धोकर निर्जल $CaCl_2$ पर सुखाया गया। इसी प्रकार तनु अम्ल की सहायता से 1.5 पी-एच० पर Cu(II) का ठोस संकुल प्राप्त किया गया, जोकि भूरे-नारंगी रंग का है।

परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त सभी संकुल सामान्य कार्बनिक विलायकों में अविलेय हैं। DMF तथा पिरीडीन में ये कुछ-कुछ विलेय हैं। 10^{-3} DMF विलयन में इन संकुलों की ग्रामाणु-चालकता बहुत कम पायी गयी, जो इन संकुलों की विद्युत-अनपघट्यता दर्शाती है। Cu(II) संकुलों का चुम्बकीय घूर्ण प्रत्याशित मान के भीतर है, तथा यह 1 इलेक्ट्रॉन की उपस्थिति दर्शाता है। इन संकुलों के विश्लेषण आँकड़े, ग्रामाणु चालकता तथा अपघटन ताप आदि सारणी 1 में दिये गये हैं।

नैबरगाल तथा अन्य[5] एवं क्रेसमेन तथा अन्य[6] ने विवरण दिया है कि Cu(II) आयन की उपस्थिति में पेनीसिलीन का अवक्रमण (degradation) हो जाता है तथा बना हुआ पेनीसिलोइक अम्ल कापर (II) के साथ अभिक्रिया कर संकुल बना लेता है। क्रेसमेन तथा अन्य[6] ने गतिज-विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित साम्य स्थापित किया है :



$$\text{Penicillin} + \text{Cu} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \text{Cupric ion-penicillin complex} \xrightarrow{k_3} \text{Cupric ion-penicilloic acid complex} + H^+$$

सारणी 1

संकुलों के भौतिक गुण तथा विश्लेषण से प्राप्त आंकड़े आदि

संकुल† क्रमांक	रंग	अपघटन ताप, °C में	ग्रामाणु†† चालकता	μ (B. M.)	विश्लेषण से (गणना से) % धातु*	C**	H**	N**
1.	हरित	240	8.0	1.85	7.10 (7.31)	44.19 (44.22)	5.80 (5.75)	9.71 (9.67)
2.	पीला-नारंगी	265	7.8	—	7.38 (7.51)	44.18 (44.12)	5.67 (5.74)	9.61 (9.56)
3.	भूरा-नारंगी	180	11.6	1.92	11.72 (11.83)	35.72 (35.75)	6.01 (5.95)	7.77 (7.82)

† क्रमांक 1 तथा 2=ML_2 क्रमांक 3=$CuL(OH)(H_2O)_3$ [जहाँ L=लीगैन्ड है]

†† ग्रामाणु चालकता 10^{-3} M DMF में, ओम्स$^{-1}$ से० मी०^2 मोल$^{-1}$

*EDTA से अनुमापन द्वारा ज्ञात

**CDRI लखनऊ से सूक्ष्म रासायनिक विश्लेषण द्वारा ज्ञात

उपर्युक्त क्रिया 5.5 पी-एच० पर की गई तथा 1 : 1 संकुल के निर्माण की सम्भावना व्यक्त की गई। प्रस्तुत शोधकार्य नैबरगाल तथा क्रेसमेन के कार्यों का समर्थन करती है। Cu(II) के अतिरिक्त Zn(II) भी पेनिसिलीन का अवक्रमण करता पाया गया। 1.5 पी-एच० पर Cu(II) पेनिसिलीन का अवक्रमण कर छः सवर्ग संयोजकता संकुल बनाता है। क्रेसमेन के 1 : 1 संकुल बनने के प्रतिकूल वर्तमान कार्य में 5.5 पी-एच० पर 1 : 2 संकुल प्राप्त हुआ हालांकि पी-एच० 1.5 पर Cu(II) के 1 : 1 संकुल प्राप्त हुआ।

दृश्य-स्पेक्ट्रम : CuL_2 का दृश्य स्पेक्ट्रम 620 mμ पर उच्च Σ मान वाला उच्चिष्ट (maxima) प्रदर्शित करता है, जबकि $CuL(OH)(H_2O)_3$ का दृश्य स्पेक्ट्रम 520 mμ पर निम्न Σ मान वाला उच्चिष्ट दर्शाता है। इस आधार पर CuL_2 तथा $CuL(OH)(H_2O)_3$ क्रमशः चार तथा छः सवर्ग संयोजकता वाले संकुल हो सकते हैं।

अवरक्त स्पेक्ट्रम : लीगैन्ड के अवरक्त स्पेक्ट्रम का समनुदेशन पूर्वकार्य[6-7] के आधार पर कर उसका, संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रम से तुलना की गई है। लीगैन्ड तथा संकुल 3450 cm^{-3} के पास विस्तृत बैंड दर्शाते हैं, जो लीगैन्ड में उसके अणु में उपस्थित क्रिस्टलीय जल तथा $CuL(OH)(H_2O)_3$ में क्रिस्टलीय जल के अतिरिक्त सवर्ग योजित जल अणुओं के कारण है। लीगैन्ड तथा सभी संकुलों में

NH (~3200 cm^{-1}), ऐमाइड C=O (~1690 cm^{-1}), NH_3^+(~2860 cm^{-1} तथा ~1495 cm^{-1}) के कारण उत्पन्न बैंड लगभग समान अवृत्ति पर परिलक्षित है, अर्थात् इन समूहों के सवर्ग-संयोजन में हिस्सा नहीं लिया। संकुलों में एक नया इमीनो समूह β-लैक्टम C=O समूह के अवक्रमण फलस्वरूप उत्पन्न हो जाता है। यह समूह संकुलन क्रिया में भी भाग लेता है। अवरक्त स्पेक्ट्रम में इस समूह के कारण तनाव 3100 cm^{-1} के करीब पाया गया। लीगैन्ड में 1770 cm^{-1} पर उपस्थित तीव्र बैन्ड β-लैक्टम C=O समूह के कारण है। संकुलों में यह बैंड अनुपस्थित है। इसका कारण इस समूह का, धातु आयन के द्वारा अवक्रमण है। अवक्रमण के पश्चात् यह —COOH समूह में परिवर्तित हो जाता हैं (एम्पीसिलीन → एम्पीसिलोइक अम्ल)। लीगैन्ड में उपस्थित मूलक COO^- मूलक के कारण असंमित तथा संमित तनाव क्रमशः 1612 cm^{-1} तथा 1410 cm^{-1} पर उपस्थित है। कीलेटन में यद्यपि यह समूह भाग लेता है तथा कार्बो-

Ph-CH-CONHCH-CH—S—C(CH₃)₂ ; NH₂ ; O=C—N——CH-COOH ; ·3H₂O

(अ)

Ph-CHCONHCH—CH—S—C(CH₃)₂ ; NH₂ ; COOH ; NH——CH ; M/2—O——C=O ; ·3H₂O

(ब)

COOH ; Ph-CHCONHCH—CH—NH ; S—C—HC·COO ; (CH₃)₂ ; Cu ; OH ; H₂O ; H₂O ; H₂O ; ·3H₂O

(स)

क्सिलिक समूह के हाइड्रोजन का, धातु के बदले प्रतिस्थापन हो जाता है पर संकुल में इस मूल कार्बोक्सिलिक समूह के हटने के साथ ही β-लैक्टम C=O समूह के अवक्रमण के कारण नया कार्बोक्सिलिक समूह उत्पन्न हो जाता है। अतएव संकुल में मूल COO^- के असंमित तथा संमित तनाव क्रमशः 1590 cm^{-1} तथा 1370 cm^{-1} के करीब नये बैन्ड के रूप में अवतरित होते हैं, जबकि अवक्रमण के फलस्वरूप बने कार्बोक्सिलिक समूह ने अपनी सामान्य आवृत्ति (~1620 cm^{-} तथा 1400 cm^{-1}) पर तनाव दर्शाया। $CuL(OH)(H_2O)_3$ के i. r. में तीन नये बैन्ड 870 cm^{-1}, 505 cm^{-1} तथा 430 cm^{-1} पर प्राप्त हुए, जो सवर्ग-योजित जल अणु के कारण उत्पन्न क्रमशः $p_r(H_2O)$, $p_\omega(H_2O)$ तथा $\nu(Cu-O)$ के लिए नियत किये जा सकते हैं। इस संकुल में —OH समूह की उपस्थिति, 3380 cm^{-1} पर स्थित तीखे

(तथा विस्तृत नहीं) एवं तीव्र बैन्ड की उपस्थिति तथा 1115 cm^{-1} पर स्थित बैन्ड, जो कि Cu—OH नमन को निर्दिष्ट करती हैं, आधार पर पुष्ट होती है। इसकी पुष्टि विश्लेषणात्मक आँकड़ों से भी होती है। Zn(II) तथा 1.5 पी-एच पर Cu(II) द्वारा निर्मित संकुलों में ν(M—N) क्रमशः 585 cm^{-1} तथा 595 cm^{-1} पर तथा ν(M—O) क्रमशः 488 cm^{-1} तथा 470 cm^{-1} पर नियत किये जा सकते हैं। 5.5 पी-एच० पर निर्मित Cu(II) संकुल में केवल एक ही तीव्र बैन्ड 615 cm^{-1} पर दृष्टिगत हुआ यह बैन्ड M—O तथा M—N के संयुक्त कम्पन के फलस्वरूप हो सकता है। उपर्युक्त अवलोकन के आधार पर संकुलों की संरचना चित्र 1 के अनुसार निरूपित की जा सकती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

शोधकार्य हेतु टीचर-फेलोशिप प्रदान करने के लिए एक लेखक (टी० के० कटकवार) विश्वविद्यालय अनुदान तथा म० प्र० शासन का कृतज्ञ है। शोधकार्य हेतु सुविधाएँ प्रदान करने के लिए लेखकद्वय, प्रो० ए० वी० महाजनी, अध्यक्ष रसायन विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर के भी आभारी हैं।

निर्देश

1. क्रिस्चनर तथा अन्य, **जर्न० मेडि० केमि०**, 1966, **9**, 369.
2. विलियम्स, डी० पी०, "दी मेटलस् ऑफ दी लाइफ", अध्याय 2, वान नार्स्ट एन्ड रीनहोल्ड, न्यूयार्क, 1971.
3. हेराल्ड, सी० नेलसन तथा जोर्ज, डब्ल्यू० वाट, **जर्न० इनआर्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1979, **41**, 406.
4. मर्फी, जूनि० एच०, "दी स्क्विब इन्स्टीट्यूट फार मेडिकल रिसर्च", निजी सूचना
5. नैबरगाल, पी० जे०, हुसार, डी० ए०, ग्रेसमेन, डब्ल्यू० ए०, सुगीता, ई० टी० तथा डोलीसिओ, जे० टी०, **जर्न० फार्म० फार्माकोल०**, 1966, **18**, 729.
6. ग्रेसमेन, डब्ल्यू० ए०, सुगीता, ई० टी०, डोलिसिओ, जे० टी० तथा नैबरगाल, पी० जे०, **वही**, 1966, **18**, 801.
7. बेल्लामी, एल० जे०, "दी इन्फ्रारेड स्पेक्ट्रा आफ काम्प्लेक्स मालीक्यूलस्", मीथ्यून एन्ड कं० लंदन, 1958, 214.
8. वेलैन्ड, एल० तथा वीस, पी० जे०, **जर्न० एसोशि० आफ एनालि० केमि०**, 1965, **48**, 965.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 161-166

एक नवीन समाकल परिवर्त का अध्ययन

जी० के० गोयल

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 11, 1980]

सारांश

एक नवीन समाकल परिवर्त

$$T_{\lambda}^{a,b,c}\left\{f(x;\,p)\right\}=\int_{p}^{\infty}(px)^{\lambda}\,(x-p)^{c-1}\,{}_2F_1\,(a,\,b,\,c,\,1-x)/p)\,f(x)\,dx.$$

के परिभाषित किया गया है और उसके गुणों का अध्ययन किया गया है। फाक्स के H-फलन सहित $f(x)$ के कुछ प्रतिबिम्ब प्राप्त किये गये हैं और उनके उपप्रमेयों के रूप में विशिष्ट दशाएँ व्यवकलित की गई हैं।

Abstract

Study of a new integral transform. *By* G. K. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

A new linear integral transform

$$T_{\lambda}^{a,b,c}\left\{f(x)\,;\,p\right\}=\int_{p}^{\infty}(px)^{\lambda}\,(x-p)^{c-1}\,{}_2F_1\,a,\,b;\,c;\,1-x/p)\,f(x)\,dx,$$

is defined and its properties are studied. A few images of $f(x)$ including that of Fox's H-function are obtained and particular cases derived as their corollaries.

माना कि दिए हुए अन्तराल (a, b) में परिभाषित फलनों के निर्धारित वर्ग के किसी फलन को $f(x)$ द्वारा सूचित करते हैं। पुनश्च, यदि $K(p, x)$ उस अन्तराल में प्राचल p के प्रत्येक मान के लिए जिसका प्रान्त (डोमेन) निर्धारित हो, x का एक निश्चित फलन है। अष्टि $K(p, x)$ के प्रति $f(x)$ का रैखिक समाकल रूपान्तरण होगा :

$$T\{f(x)\}=\int_{a}^{b}K(p,\,x)\,f(x)\,dx \tag{1}$$

फलनों का वर्ग तथा p का डोमेन इस प्रकार निर्धारित किये जाते हैं कि समाकल (1) का अस्तित्व हो। तब $T\{f(x)\}$ से फलन $\phi(p)$ का सूचन होता है जो T के भीतर $f(x)$ का परिवर्त है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम ऐसे रैखिक परिवर्त का अध्ययन करेंगे जिसकी अष्टि

$$K(p, x)=(px)^{\lambda}\ (xp)^{c-1}\ {}_2F_1\ (a, b; c, 1-x/p)$$

को अवकाश $P\{\lambda, a, b. c\}$ में परिभाषित किया जाता है जो उन समस्त फलनों $f(x)$ के वर्ग का सूचन करता है जिससे निम्नलिखित गुणों की तुष्टि होती है।

(i) $x^{\lambda+c-a} f(x) \in L(R_1, \infty)$,

(ii) $x^{\lambda+c-b} f(x) \in L(R_1, \propto)$,

(iii) $R(c)>0$

तथा (iv) $f(x)$ की $x=p$ पर कोई विचित्रता नहीं है और R_1 एक सान्त वास्तविक मात्रा है जो p से बड़ी या उसके तुल्य है।

समाकल परिवर्त है

$$T_{\lambda}^{a,b,c}\left\{f(x);\ p\right\}=\int_{p}^{\infty}\ (px)^{\lambda}\ (x-p)^{c-1}\ {}_2F_1\ (a, b;\ c;\ 1-x/p)\, f(x)\, dx \qquad (2)$$

जिसे अब आगे $T\{f(x); p\}$ के रूप में अंकित किया जावेगा।

अनुभाग (क) में $T\{f(x); p\}$ के चार मूलभूत गुणों की विवेचना की गई है। कतिपय गुणों की उपपत्तियाँ अत्यन्त सरल होने के कारण छोड़ दी गई हैं। अनुभाग (ख) में परिवर्त T के अन्तर्गत $f(x)$ के कुछ प्रतिबिम्ब दिये गये हैं। अनुभाग (ग) फाक्स के H-फलन वाले एक समाकल का विस्तृत मूल्यांकन प्रस्तुत करता है।[4]

इस प्रपत्र में सर्वत्र निम्नलिखित संकेतों का व्यवहार हुआ है :

$$\{a_p, e_p\}=(a_1. e_1), (a_2, e_2), \ldots (a_p, e_p)$$

$$\{a_p\}=a_1, a_2. a_3, \ldots a_p.$$

$$I_{p,\lambda}^{\mu}=\int_{p}^{\infty} x^{\lambda}(x-p)^{\mu-1} f(x)\ dx, \qquad (3)$$

अनुभाग (क)

प्रमेय 1 यदि

(i) $f_1 \in P\ (a, b. c, \lambda)$

(ii) $f_2 \in P\ (a. b, c, \lambda)$

(iii) $R(c)>0$,

तो $$A\ T\{f_1(x); p\}+B\ T\{f_2(x); p\}=T\{Af_1(x)+Bf_2(x); p\} \tag{4}$$

प्रमेय 2 यदि

$$f \in P(\lambda, a, b, c) \text{ तथा } R(c)>0,$$

तो $$s^{-2\lambda-c}\ T\{f(x); sp\}=T\{f(sp); p\} \tag{5}$$

प्रमेय 3 यदि

$f \in P(\lambda, a, b, c)$ तथा $R(c)>0,$

तो $$T\{f(x); p\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r\,(b)_r}{(c)_r\,r!}(-1)^r\,p^{\lambda-r}\int_p^{\infty}x^{\lambda}\,(x-p)^{c+r-1}f(x)\,dx,$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r\,(b)_r}{(c)_r\,r!}(-r)^r\,p^{\lambda-r}\,I_{p,\lambda}^{c+r} \tag{6}$$

उपपत्ति : समीकरण (2) के दक्षिण पक्ष में गॉस फलन का मान रखने तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर हमें अभीष्ट फल प्राप्त होता है ।

संक्रियाओं का विलोमन वैध है क्योंकि हम देखते हैं कि (i) $f(x)$ ऐसा है कि $x^{\lambda}(x-p)^{c+r-1}f(x)$ समाकलनीय है (p, ∞) में तथा (ii) अनन्त श्रेणी उसी अन्तराल में समान रूप से अभिसारी है ।

अनुभाग (ख)

यहाँ पर प्रमेय 3 के सम्प्रयोग से फलनों के किसी एक वर्ग के प्रतिबिम्बों को प्राप्त किया गया है ।

(i) माना $f(x)=x^{-\rho}$

तो $$(2, p.\ 201, R, 6)\ I_{p,\lambda}^{c+r}=\frac{\Gamma(c+r)\ \Gamma(\rho-\lambda-c-r)}{\Gamma(\rho-\lambda)}p^{c+r-\rho-\lambda}$$

जहाँ $0<R(c)<R(\rho-\lambda).$

अब उपर्युक्त परिणाम के दक्षिण पक्ष में श्रेणियों का योग करने से[1]

$$T\{f(x); p\}=\frac{\Gamma(c)\ \Gamma(\rho-\lambda-c)\ \Gamma(1-\rho+\lambda-c)\ \Gamma(1-\rho+\lambda+c-a-b)}{\Gamma(\rho-\lambda)\ \Gamma(1-\rho+\lambda+c-a)\ \Gamma(1-\rho+\lambda+c-b)\ p^{\rho-c}} \tag{7}$$

जहाँ $R(1-\rho+\lambda+c-a-b)>0.$

(ii) यदि हम $f(x)=x^{-\lambda}(x+y)^{-\rho}$ लें तो (2 p, 201, R 7)

$$I_{p,\lambda}^{c+r}=\frac{\Gamma(c+r)\,\Gamma(\rho-c-r)}{\Gamma(\rho)}(p+y)^{c+r-\rho}$$

जहाँ $0<R(c)<R(\rho)$ तथा $|\arg p/y|<\pi$

तथा श्रेणियों के योगफल से

$$T\{f(x);p\}=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\rho-c)}{\Gamma(\rho)}p^{\lambda}p^{c-\rho}\,{}_2F_1(a,b;1-\rho+c;1+y/p) \tag{8}$$

प्राप्त होता है जहाँ $R(c)<R(\rho)$

(iii) माना $f(x)=x^{-\rho}(x+a)^{\mu}$, तो (2 p. 201, R 8)

$$I_{p,\lambda}^{c+r}=\frac{\Gamma(c+r)\,\Gamma(\rho-\lambda-c-\mu-r)}{\Gamma(\rho-\lambda-\mu)}p^{c+r+\mu+\lambda-\rho}$$

$${}_2F_1(-\mu,\rho-\lambda-\mu-c-r;1-a/p)$$

जहाँ $0<R(c)<R(\rho-\lambda-\mu)$, $|\arg a/p|<\pi$

तथा

$$T\{f(x);p\}=\frac{\Gamma c\,\Gamma(\rho-\lambda-\mu-c)-c)}{\Gamma(\rho-\lambda-\mu)}H_2[\rho-\lambda-c-\mu,-\mu,a,b,\rho-\lambda-\mu;$$

$$-a/p,-1] \tag{9}$$

जहाँ (1, p. 225, R 14)

$$H_2[a,b,c,d,e;x,y]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m(c)_n(d)_n}{(e)_m\,m!\,n!}x^m y^n \tag{10}$$

(iv) $f(x)=x^{-\lambda}e^{\delta x}$ मानें तो (2 p. 202, R 11)

$$I_{p,\lambda}^{c+r}=\Gamma(c+r)\,\delta^{-c-r}e^{-p\delta},$$

जहाँ $R(c)>0$, $R(p\delta)>0$

और $T\{f(x);p\}=\delta^{-c}e^{-p\delta}p^{\lambda}\Gamma(c)\,{}_2F_0(a,b;\ldots;1/p\delta)$ (11)

जहाँ $R(c)>0$, $R(p\delta)>0$.

(v) माना $f(x)=x^{-\rho} e^{\delta/x}$, तो (2, p. 203, R 15)

$$I_{p,\lambda}^{c+r}=\frac{\Gamma(c+r)\,\Gamma(\rho-\lambda-c-r)}{\Gamma(\rho-\lambda)\,p^{\rho-c-r-\lambda}}\ {}_1F_1\,(\rho-\lambda-c-r;\,\rho-\lambda;\,\delta/p)$$

जहाँ $0<R(c)<R(\rho-\lambda)$

और
$$T\{f(x);\,p\}=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\rho-\lambda-c)}{\Gamma(\rho-c)\,p^{\rho-c-2\lambda}}H_{11}\,(\rho-\lambda-c,\,a,\,b,\,\rho-\lambda;\,\delta/p,\,-1) \tag{12}$$

जहाँ (1, p. 227, R 39)

$$H_{11}\,(a,\,b,\,c,\,d;\,x,\,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}\,(b)_n\,(c)_n}{(d)_m\,m!\,n!}\,x^m\,y^n,\ |y|<1$$

अनुभाग (ग)

यदि फलन के निर्धारित वर्ग को फाक्स का H-फलन मान लिया जाय तो परिवर्त T के अन्दर इसका प्रतिबिम्ब निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है :

हम निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करेंगे

$$\int_p^{\infty} x^{\lambda}\,(x-p)^{c-1}\,{}_2F_1\,(a,\,b,\,c,\,1-x/p)\,H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{a_p,\,e_p\}\\ \{b_q,\,f_q\}\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\Gamma(c)\,p^{\lambda+c}\,H_{p+2,q+2}^{m+2,n}\left[zp^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{a_p,\,e_p\},\,(-\lambda,\,\sigma),\,(a+b-c-\lambda,\,\sigma)\\ (a-c-\lambda,\,\sigma),\,(b-c-\lambda,\sigma),\,\{b_q,f_q\}\end{matrix}\right.\right] \tag{13}$$

समीकरण (13) के वामपक्ष के समाकल के अभिसरण पर शोध करने से पता चलता है कि प्राचल निम्नलिखित प्रतिबन्धों के द्वारा अनुशासित होते हैं :

(i) $\sigma>0,\ R(p)>0,\ R(c)>0,$

(ii) $\lambda'>0,\ |\arg(zp^{\sigma})|<\frac{\pi}{2}\lambda'$

(iii) $\lambda'\geqslant 0,\ |\arg\,(zp^{\sigma})|\leqslant\frac{\pi}{2}\lambda',\ R(\mu'+1)<0$

जहाँ λ' तथा μ' से क्रमशः

$$\sum_{j=1}^{n}(e_j)-\sum_{j=n-1}^{p}(e_j)+\sum_{j=1}^{m}(f_j)-\sum_{j=m-1}^{q}(f_j)$$

एवं
$$\tfrac{1}{2}\,(p-q)+\sum_{j=1}^{q}(b_j)-\sum_{j=1}^{p}(a_j)-c$$

का सूचन होता है ।

उपपत्ति : समीकरण (13) के वामपक्ष के समाकल में H-फलन का मान रखने, समाकल का क्रम बदलने और आन्तरिक x-समाकल में $x=p(1+y)$ रखने एवं निर्देश (3, p. 400) की सहायता से y समाकल का मान निकालने पर हमें (13) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है ।

समाकलन के क्रम का विलोमन वैध है क्योंकि हम देखते हैं कि x-समाकल परम अभिसारी होता है यदि $R(c)>0$, $R(a-c-\lambda)>1$ तथा $R(b-c-\lambda)>0$.

विशिष्ट दशाएँ :

(a) यदि (13) में समस्त e तथा f इकाई के बराबर रखें, a के स्थान पर $a-c$, b के स्थान पर $b-c$, c के स्थान पर $a+b-c-d$, x के स्थान पर px, σ के स्थान पर n, z के स्थान पर $1/z$ रखें और $\lambda=d-1$ तो हमें शर्मा[6] का समाकल प्राप्त होगा ।

(b) यदि (13) में $a \to 0$, तो

$$\int_p^\infty x^\lambda (x-p)^{c-1} H_{pq}^{mn}\left\{ zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} \{a_p, e_p\} \\ \{b_q, f_q\} \end{matrix} \right\} dx$$

$$=\Gamma c\, p^{\lambda+c} H_{p+2\; q+2}^{m+2\; n}\left[zp^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} \{a_p, e_p\}, (-\lambda, \sigma), (b-c-\lambda, \sigma) \\ (-c-\lambda, \sigma), (b-c-\lambda, \sigma), \{b_q, f_q\} \end{matrix} \right] \qquad (14)$$

जहाँ $R(c)>0$, $R(\lambda+c+\sigma \min b_j/f_j)>0$, $j=1, 2, \ldots, m$; $|\arg z|<\frac{\pi}{2}\lambda'$, $\lambda'>0$.

निर्देश

1. बेटमैन मैनुस्क्रिप्ट प्रोजेक्ट, Higher Transcendental Function, भाग 1.
2. वही, Tables of Integral Transforms, भाग 1.
3. वही, वही, भाग 2.
4. फाक्स, सी०, ट्रांजे० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-42.
5. गुप्ता, के० सी०, Annals de la Societe Scientifique de Bruxelles, T. 79, II, पृष्ठ 97-106
6. शर्मा, के० सी०, प्रोसी० नेशनल एके० साइंस इँडिया
7. माइज़र, सी० एस०, Proc. Neder. Akad. Wetensch. 1940, **43**, 599-608, 702-711.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 167-175

गुणक निरूपण तथा जनक फलन H_2 तथा ψ_1

रेणु जैन तथा बी० एम० अग्रवाल
गणित विभाग, के० आर० जी० कालेज, ग्वालियर

[प्राप्त—अगस्त 6, 1980]

सारांश

लाई ग्रूप थ्योरी पर आधारित जनक फलनों को प्राप्त करने की विधि को उसे $2F_1$ में सम्प्रयुक्त करके जनक फलन H_2 तथा ψ_1 प्राप्त करने के लिये विस्तारित किया गया है। विशिष्ट दशाओं पर भी विचार किया गया है।

Abstract

Multiplier representation and generating functions H_2 and ψ_1. *By* Renu Jain and B. M. Agrawal, Department of Mathematics, K. R. G. College, Gwalior.

A method for obtaining generating functions based on Lie-group theory, suggested by Weisner[1] and subsequently modified by Miller[2], has been extended to $2F_1$'s to find generating functions H_2 and ψ_1. The special cases have also been dealt with.

मनोचा[3, 4] ने $_1F_1$ के लिए द्विगुण हाइपरज्यामितीय श्रेणी वाले जनक फलनों को ज्ञात करने के लिए उस विधि का प्रयोग किया जो वीसनर[1] द्वारा प्रस्तावित थी और बाद में मिलर[2] द्वारा परिवर्धित की गई थी। हम इसी प्रविधि को $_2F_1$ के लिए विस्तारित करके H_2 तथा ψ जनक फलनों को ज्ञात करेंगे।

एक साधारण अवकल समीकरण

$$L\left(x, \frac{d}{dx}, n\right)V=0 \tag{1.1}$$

लेकर, जिसका $V_n(x)$ है, हम सिद्ध करेंगे कि संगत आंशिक अवकल समीकरण

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)=0 \tag{1.2}$$

रूपान्तर के द्वारा निश्चर बना रहता है जो लाई ग्रूप के गुणक निरूपण $[T(g)f](x, y)$ द्वारा उत्प्रेरित होता है और $SL(2)$ के एकैक समाकारी है। इस प्रकार (1.2) से एक हल $[T(g)f](x, y)$ मिलता है जो (1.1) के हल $V_n(x)$ के लिए जनक फलन का कार्य करता है।

2. अवकल आपरेटर तथा गुणक निरूपण

हमें ज्ञात है कि

$$u(x)={}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, \beta; \\ \gamma;\end{matrix}\ x\right] \tag{2.1}$$

(2.2) का हल है[5]

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha-n+\beta+1)x\}\frac{du}{dx}-(\alpha-n)\beta u=0 \tag{2.2}$$

इसमें हम प्राचल n के स्थान पर आपरेटर $y\ \partial/\partial y$ तथा d/dx के स्थान पर $\partial/\partial x$ रख कर निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं

$$\left[x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\left\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right\}\frac{\partial}{\partial x}+\beta y\frac{\partial}{\partial x}-\alpha\beta\right]f(x, y)=0$$

माना कि $\quad Lf(x, y)=0.$ (2.3)

यहाँ पर $f(x, y)=y^n u(x)$ हल है (2.3) का यदि $u(x)$ (2.2) का हल हो।

अब हम प्रथम कोटि के आंशिक अवकल आपरेटरों का परिचय देंगे

$$\begin{aligned}J^3&=y\ \partial/\partial y-\alpha+\gamma/2\\ J^+&=x(1-x)y\ \partial/\partial x+y\ \partial/\partial y+(\gamma-\alpha-\beta x)y\\ J^-&=xy^{-1}\ \partial/\partial x-\partial/\partial y+\alpha y^{-1}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

इन आपरेटरों से द्विपरिवर्तक (Commutator) सम्बन्धों

$$[J^3, J^\pm]=\pm J^\pm, \quad [J^+, J^-]=2J^3 \tag{2.5}$$

की तुष्टि होती है अतः वे $sl(2)$ के एकैक समाकारी लाई-अलजेब्रा का जनन करते हैं।

$$C=J^+J^-+J^3J^3-J^3$$

$$=x\left[x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{\partial}{\partial x}+\beta y\,\partial/\partial y-\alpha\beta\right]$$

$$+\gamma/2\,(\gamma/2-1)$$

$$=xL+\gamma/2\,(\gamma/2-1), \tag{2.6}$$

J–आपरेटरों में से प्रत्येक के साथ द्विपरिवर्तन करता है।

C के पदों में (2.3) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$Cf(x,y)=\gamma/2\,(\gamma/2-1)\,f(x,y). \tag{2.7}$$

J–आपरेटरों द्वारा उत्प्रेरित गुणक निरूपण का निर्धारण करने के लिए हमें व्यंजक

$$[T(g)f](x,y)=e^{a'J^-}e^{b'J^+}e^{c'J^3}f(x,y)$$

का परिकलन करना होगा। अब

$$e^{a'J^-}f(x,y)=(1-a'/y)^{-\alpha}f\left(\frac{xy}{y-a'},\ y-a'\right),\ |a'/y|<1 \tag{2.8}$$

$$e^{b'J^+}f(x,y)=(1-b'y)^{\alpha+\beta-\gamma}\{1-b'(1-x)y\}^{-\beta}$$

$$\times f\left(\frac{x}{1-b'(1-x)y},\ \frac{y}{1-b'y}\right)|b'(1-x)y|<1 \tag{2.9}$$

$$e^{c'J^3}f(x,y)=e^{(\gamma/2-\alpha)c'}f(x,ye^{c'}) \tag{2.10}$$

अत:

$$[T(g)f](x,y)=e^{(\gamma/2-\alpha)c'}(1-a'/y)^{-\alpha}\{1-b'(y-a)\}^{\alpha+\beta-\gamma}$$

$$\times f\left\{1+b'\left(\frac{x}{y-a'}-1\right)\left(y-a'\right)\right\}^{-\beta}$$

$$\times f\left(\frac{xy}{(y-a')\{1+b'(xy/y-a')(y-a')},\ \frac{y-a'}{1-a'b'-b'y}e^{c'}\right) \tag{2.11}$$

सम्मिश्र प्राचल a', b' तथा c' का सम्बन्ध $g\in SL(2)$ से है,

$$g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ ad-bc=1$$ [2; p. 8] से

$$e^{c'/2}=a,\ a'=-c/a,\ b'=-ab \tag{2.12}$$

अत: तत्समक तत्व $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2)$, के अत्यधिक पार्श्व में g के लिए

$$[T(g) f](x, y) = (a+c/y)^{-\alpha} (d+by)^{\alpha+\beta-\gamma} \{d+b(1-x)y\}^{-\beta}$$

$$\times f\left(\frac{xy}{(c+ay)\{d+b(1-x)y\}}, \frac{c+ay}{d+by}\right), \tag{2.13}$$

$$|c/ay| < 1, \ |by/d| < \min(1, |(1-x)|^{-1}), \ ad-bc=1,$$

$$-\pi < \arg a, \arg d < \pi.$$

3. जनक फलन

(अ) हम $f(x, y)$ को आपरेटर C तथा

$$J^3 J^3 - J^- J^3 - (\gamma - 2\alpha - \epsilon - \delta) J^3 + (\gamma/2 - \alpha) J^-.$$

को सामान्य आइगन फलन के रूप में चुनते हैं अर्थात् $f(x, y)$ युगपत समीकरणों

$$C f(x, y) = \gamma/2 (\gamma/2 - 1) f(x, y) \tag{3.1}$$

$$[J^3 J^3 - J^- J^3 - (\gamma - 2\alpha - \epsilon - \delta) J^3 + (\gamma/2 - \alpha) J^-] f(x, y)$$

$$= [(\gamma/2 - \alpha)(\alpha - \gamma/2 + \epsilon + \delta) - \epsilon\delta] f(x, y)$$

की तुष्टि करता है। इन समीकरणों को फिर से निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\left[x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left\{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right\}\frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} - \alpha\beta\right] f(x, y) = 0 \tag{3.2}$$

$$\left[y(y+1)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left\{1 - \alpha + (\epsilon+\delta+1)\, y\right\}\frac{\partial}{\partial y} + \epsilon\delta\right] f(x_1 y) = 0$$

इन समीकरणों का हल है [5 p. 234]

$$f(x, y) = H_2[\alpha, \beta, \epsilon, \delta, \gamma, x, y] \tag{3.3}$$

जहाँ

$$H_2[\alpha, \beta, \epsilon, \delta; \gamma; x, y] = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{j-k}\,(\beta)_j\,(\epsilon)_k\,(\delta)_k}{(\gamma)_j\, j!\, k!} x^j y^k \tag{3.4}$$

$$\therefore\ [T(g) f](x, y) = (a+c/y)^{-\alpha} (d+by)^{\alpha+\beta-\gamma} \{d+b(1-x]y\}^{-\beta}$$

$$\times H_2\left[\alpha, \beta, \epsilon, \delta, \gamma, \frac{xy}{(c+ay)\{d+b(1-x)y\}}, \frac{c+ay}{d+by}\right]$$

$$|c/ay|<1, \ |d/by|<\min(1, 1(1-x)^{-1})$$

अब $[T(g)f](x, y)$ से

$$C[T(g)f](x, y)=T(g)[cf](x, y)$$
$$=T(g)[\gamma/2\ (\gamma/2-1)f](x, y)$$
$$=\gamma/2\ (\gamma/2-1)\ [T(g)f](x, y) \tag{3.6}$$

की तुष्टि होती है जिससे दर्शित होता है कि समीकरण (2.3) रूपान्तर के प्रति निश्चर है जो $SL(2)$ के गुणक निरूपण द्वारा उत्प्रेरित होता है।

अब $[T(g)f](x, y)$ का प्रसार निम्न रूप में होता है

$$[T(g)f(x, y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(g)\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, & \beta; \\ & \gamma;\end{matrix}\ x\right]\ y^n \tag{3.7}$$

गुणांकों $A_n(g)$ को परिकलित करने के लिए दोनों पक्षों में $x=0$ रखते हैं। इससे हमें

$$A_n(g)=a^{-\alpha}\ d^{\alpha-\gamma}\ (\gamma-\alpha)_n\left(\frac{-by}{d}\right)^n$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r\ (\gamma-\alpha+n)_r}{r!\ \Gamma(1+n+r)}\left(\frac{bc}{ad}\right)^r\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n-r, \ \epsilon, \ \delta; \\ 1-\alpha, \ \gamma-\alpha;\end{matrix}\ a/b\right] \tag{3.8}$$

प्राप्त होता है। इस तरह जनक फलन होगा :

$$(1+c/ay)^{-\alpha}\ (1+by/d)^{\alpha+\beta-\gamma}\ \{a+b(1-x)y\}^{-\beta}$$

$$\times H_2\left[\alpha, \beta, \epsilon, \delta; \gamma; \frac{xy}{(c+ay)\ \{d+b(1-x)y\}}, \frac{c+ay}{d+by}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\gamma-\alpha)_n\ \left(-\frac{by}{d}\right)^n\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, \ \beta; \\ \gamma;\end{matrix}\ x\right]$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r\ (\gamma-\alpha+n)_r}{r!\ \Gamma(1+n+r)}\left(\frac{bc}{ad}\right)^r\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n-r, \ \epsilon, \ \delta; \\ 1-\alpha-r, \ \gamma-\alpha;\end{matrix}\ a/b\right]$$

$$|c/ay|<1, \quad |by/d|<(1, |(1-x)|^{-1}), \quad ad-bc=1 \tag{3.9}$$

जहाँ $n=-1, -2 \ldots$ के संगत पद सम्बन्ध

$$\underset{u\to -k}{Lt} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r (\gamma-\alpha+\mu)_r}{r!\,\Gamma(1+r+\mu)} \left(\frac{bc}{ad}\right)^r {}_3F_2\left[\begin{matrix}-r-\mu, \epsilon, \delta;\\ 1-\alpha-r, \gamma-\alpha;\end{matrix} a/b\right]$$

$$=\frac{(\alpha)_k (\gamma-\alpha-k)_k}{k!} \left(\frac{bc}{ad}\right)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_r (\alpha+k)_r}{r!\,(1+k)_r} \left(\frac{bc}{ad}\right)^r \tag{3.10}$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix}-r, \epsilon, \delta;\\ 1-\alpha-r-k, \gamma-\alpha;\end{matrix} \frac{a}{b}\right], \quad k=1, 2, 3 \ldots$$

के कारण भलीभांति परिभाषित हैं।

विशिष्ट दशायें

(i) $$\left(1+\frac{w}{y}\right)^{-\alpha} H_2\left[\alpha, \beta, \epsilon, \delta, \gamma, \frac{xy}{w+y}, w+y\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (\epsilon)_n (\delta)_n}{(1-\alpha)_n\, n!} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, \beta;\\ \gamma;\end{matrix} x\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}\epsilon+n, \delta+n;\\ 1+n;\end{matrix} -w\right] \tag{3.11}$$

$$|w/y|<1$$

जहाँ $n=-1, -2, \ldots$ के संगत पद (3.10) प्रकार के सम्बन्ध के द्वारा भलीभांति परिभाषित हैं।

(ii) $$(1-y)^{\alpha+\beta-\gamma} \{1-(1-x)y\}^{-\beta} H_2\left[\alpha, \beta, \epsilon, \delta; \gamma; \frac{x}{1-y}, \frac{wy}{1-y}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n y^n}{n!} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, \beta;\\ \gamma;\end{matrix} x\right] {}_3F_2\left[\begin{matrix}n, \epsilon, \delta;\\ 1-\alpha, \gamma-\alpha;\end{matrix} w\right], \tag{3.12}$$

$$|y|<1.$$

यदि हम (3.8) में x के स्थान पर x/β रखें और सीमाओं को $\beta\to\infty$ लें तो हमें ${}_1F_1$ के लिए संगत परिणाम मिलते हैं। आगे, यदि हम $\epsilon=\gamma/2+1$ तथा $\delta=\gamma/2-\alpha$, लें तो ${}_1F_1$ का परिणाम निम्नवत् (4; p. 111) ($\alpha\equiv -m$) होगा।

(iii) $$\exp\left(\frac{bxy}{d+by}\right)\left(1+\frac{by}{d}\right)^{\alpha-\beta}\left(1+\frac{c}{ay}\right)^{-\alpha}$$

जहाँ $n=-1, -2 \ldots$ के संगत पद सम्बन्ध

$$\underset{u\to -k}{Lt} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r (\gamma-\alpha+\mu)_r}{r!\, \Gamma(1+r+\mu)} \left(\frac{bc}{ad}\right)^r {}_3F_2\left[\begin{matrix}-r-\mu, \epsilon, \delta;\\ 1-\alpha-r, \gamma-\alpha;\end{matrix} a/b\right]$$

$$=\frac{(\alpha)_k (\gamma-\alpha-k)_k}{k!} \left(\frac{bc}{ad}\right)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_r (\alpha+k)_r}{r!\,(1+k)_r} \left(\frac{bc}{ad}\right)^r \tag{3.10}$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix}-r, \epsilon, \delta;\\ 1-\alpha-r-k, \gamma-\alpha;\end{matrix} \frac{a}{b}\right], \quad k=1, 2, 3 \ldots$$

के कारण भलीभांति परिभाषित हैं।

विशिष्ट दशायें

(i)
$$\left(1+\frac{w}{y}\right)^{-\alpha} H_2\left[\alpha, \beta; \epsilon, \delta, \gamma, \quad \frac{xy}{w+y}, w+y\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (\epsilon)_n (\delta)_n}{(1-\alpha)_n\, n!} \; {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, \beta;\\ \gamma;\end{matrix} x\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}\epsilon+n, \delta+n;\\ 1+n;\end{matrix} -w\right] \tag{3.11}$$

$$|w/y|<1$$

जहाँ $n=-1, -2, \ldots$ के संगत पद (3.10) प्रकार के सम्बन्ध के द्वारा भलीभांति परिभाषित हैं।

(ii)
$$(1-y)^{\alpha+\beta-\gamma} \{1-(1-x)y\}^{-\beta} H_2\left[\alpha, \beta, \epsilon, \delta; \gamma; \frac{x}{1-y}, \frac{wy}{1-y}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n y^n}{n!} \; {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, \beta;\\ \gamma;\end{matrix} x\right] \; {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, \epsilon, \delta;\\ 1-\alpha, \gamma-\alpha;\end{matrix} w\right], \tag{3.12}$$

$$|y|<1.$$

यदि हम (3.8) में x के स्थान पर x/β रखें और सीमाओं को $\beta\to\infty$ लें तो हमें ${}_1F_1$ के लिए संगत परिणाम मिलते हैं। आगे, यदि हम $\epsilon=\gamma/2+1$ तथा $\delta=\gamma/2-\alpha$, लें तो ${}_1F_1$ का परिणाम निम्नवत् (4; p. 111) ($\alpha\equiv-m$) होगा।

(iii)
$$\exp\left(\frac{bxy}{d+by}\right)\left(1+\frac{by}{d}\right)^{\alpha-\beta}\left(1+\frac{c}{ay}\right)^{-\alpha}$$

$$\times H_{11}\left[\alpha, \gamma/2-1, \gamma/2-\alpha, \gamma, \frac{xy}{(c+ay)(d+by)}, \frac{c+ay}{d+by}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\gamma-\alpha)_n\left(\frac{-by}{d}\right)^n {}_1F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n,\\ \gamma,\end{matrix} x\right] \qquad (3.13)$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r\,(\gamma-\alpha+n)_r}{r!\,\Gamma(1+n+r)}\left(\frac{bc}{ad}\right)^r {}_3F_2\left[\begin{matrix}\gamma/2-1, \gamma/2-\alpha, -n-r,\\ \gamma-\alpha, 1-\alpha-r,\end{matrix}\ a/b\right],$$

$$|c/ay|<1,\ |(by/d|<1,\ ad-bc=1$$

जहाँ $n=-1, -2 \ldots$ के संगत पद (3.10) प्रकार के सम्बन्ध के कारण भलीभाँति परिभाषित हैं।

(आ) अब हम $f(x, y)$ को आपरेटरों C तथा $J^3J^3-J^-+(\gamma'-2\alpha-\gamma-1)J^3$ को एक सामान्य आइगन फलन के रूप में मानते हैं अर्थात् $f(x, y)$ युगपत समीकरणों

$$Cf(x, y)=\gamma/2\,(\gamma/2-1)\,f(x, y) \qquad (3.14)$$

$$[J^3J^3-J^-+(\gamma'-2\alpha-\gamma+1)J^3]\,f(x, y)=(\gamma/2-\alpha)\,(\gamma'-\gamma/2+\alpha-1)\,f(x, y)$$

की तुष्टि करता है जिसे निम्न रूप में फिर से लिखा जा सकता है :

$$\left[x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\left\{\gamma-(\gamma-\alpha+\beta+1)x\right\}\frac{\partial}{\partial x}+\beta y\frac{\partial}{\partial y}-(\gamma-\alpha)\beta\right]$$

$$(1-x)^{-\beta} f\left(-\frac{x}{1-x}, y\right)=0$$

$$\left[y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(\gamma'-y)\frac{\partial}{\partial y}-x\frac{\partial}{\partial x}-(\gamma-\alpha)\right](1-x)^{-\beta}f\left(-\frac{x}{1-x}, y\right)=0 \qquad (3.15)$$

इन समीकरणों का हल होगा [5; p. 235]

$$(1-x)^{-\beta} f\left(-\frac{x}{1-x}, y\right)=\psi_1\left[\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y\right] \qquad (3.16)$$

जहाँ $\psi_1[\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y]=\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{j+k}\,(\beta)_j}{(\gamma)_j\,(\gamma')_k\, j!\, k!}x^j y^k$

हम (3.16) को फिर से इस प्रकार लिखेंगे

$$f(x, y)=(1-x)^{-\beta}\psi_1\left[\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \gamma', -\frac{x}{1-x}, y\right]$$

अत:

$$[T(g)f](x,y)=y^{\beta}(a+c/y)^{\beta-\alpha}(d+by)^{\alpha-\gamma}\{c+a(1-x)y\}^{-\beta}$$

$$\times\psi_1\left[\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\frac{-xy}{(d+by)\{c+a(1-x)y\}},\frac{c+ay}{d+by}\right]$$

$$|c/ay|<\min(1,|(1-x)|^{-1}),\ |by/d|<1,\ ad-bc=1 \qquad (3.17)$$

अनुभाग (अ) में प्रयुक्त की गई विधि के समान विधि से हम निम्नलिखित जनक फलन प्राप्त करते हैं

$$\left(1+\frac{c}{ay}\right)^{\beta-\alpha}\left(1+\frac{by}{d}\right)^{\alpha-\gamma}\left\{1+\frac{c}{a(1-x)y}\right\}^{-\beta}(1-x)^{-\beta}$$

$$\times\psi_1\left[\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\frac{-xy}{(d+by)\{c+a(1-x)y\}},\frac{c+ax}{d+by}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\gamma-\alpha)_n(-by/d)^n\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n,\beta,\\ \gamma,\end{matrix}x\right]\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\gamma-\alpha+n)_r}{r!\,\Gamma(1+n+r)}\left(\frac{bc}{ad}\right)^r \qquad (3.18)$$

$$\times{}_2F_2\left[\begin{matrix}-n-r,\ 1-\alpha,\\ \gamma',\ \ 1-\alpha-r,\end{matrix}a/b\right],\ |by/d|<1,\ |c/ay|<\min(1,|(1-x)|^{-1})$$

$$ad-bc=1.$$

जहाँ $n=1, -2 \ldots$ से संगत पद (3.10) प्रकार के सम्बन्ध के कारण भलीभाँति परिभाषित हैं।

विशिष्ट दशाएं

(i)
$$\left(1+\frac{w}{y}\right)^{\beta-\alpha}\left(1+\frac{w}{(1-x)y}\right)^{-\beta}(1-x)^{-\beta}$$

$$\times\psi_1\left[\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\frac{-xy}{w+(1-x)y},w+y\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma')_n\,n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n,\beta,\\ \gamma,\end{matrix}x\right]{}_2F_2\left[\begin{matrix}\gamma-\alpha+n,\ 1-\alpha+n,\\ 1+n,\ \ \gamma'+n,\end{matrix}w\right]y^n, \qquad (3.19)$$

जहाँ $n=-1, -2 \ldots$ से संगत पद (3.10) प्रकार के सम्बन्ध के कारण भलीभाँति परिभाषित हैं।

(ii)
$$(1-y)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta}\psi_1\left[\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\gamma',\frac{-x}{(1-x)(1-y)},\frac{-wy}{1-y}\right] \qquad (3.20)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_n}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n,\ \beta,\\ \gamma,\end{matrix}x\right]\ {}_1F_1\left[\begin{matrix}-n,\\ \gamma,\end{matrix}w\right]y^n,$$

$|y|<1$

यदि हम (3.18) में x के स्थान पर x/β रखकर तथा $\beta \to \infty$ सीमायें लेकर प्राचल β को संगमी बना लें तो हमें प्राप्त होगा [4, p. 108] ($\alpha \equiv -m$)

$$\text{(iii)} \qquad \exp\left(\frac{axy}{c+ay}\right)\left(1+\frac{by}{d}\right)^{\alpha-\gamma}\left(1+\frac{c}{dy}\right)^{-\alpha}$$

$$\times \psi_2\left[\gamma-\alpha, \gamma, \gamma', \frac{-xy}{(c+ay)(d+by)}, \frac{c+ay}{d+by}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma-\alpha)_n (-by/d)^n \, {}_1F_1\left[\begin{matrix}\alpha-n, \\ \gamma,\end{matrix} x\right] \Sigma \frac{(\alpha)_r (\gamma-\alpha+n)_r}{\Gamma(1+n+r)\, r!}$$

$$\times {}_2F_2\left[\begin{matrix}-n-r, & 1-\alpha, \\ \gamma, & 1-\alpha-r,\end{matrix} a/b)\right], \; |c/ay|<1, \; |by/d|<1.$$

जहाँ $n=-1, \ldots 2 \ldots$ के संगत पद (3.10) प्रकार के सम्बन्ध के कारण भलीभाँति परिभाषित हैं।

निर्देश

1. वीसनर, एल०, **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1955, 5, 1033-39
2. मिलर, डब्ल्यू०, जूनि०, Lie Theory and special functions, एकेडिमिक प्रेस, न्यूयार्क 1976.
3. मनोचा, एच० एल०, Lie Theoretic generating functions, publications, de 1, institut Mathematique, Nouvella 1966.
4. मनोचा, एच० एल० तथा जैन सुनीता, Univ. Sancti Pauli, Tokyo.
5. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन, न्यूयार्क 1960.
6. एर्डेल्यी० ए०, Higher Transcendental Functions (बेटमान मैनुस्क्रिप्ट प्रोजेक्ट) भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982 Pages, 177-181

ऑक्सीजन और आर्गन के द्रव मिश्रणों के विभिन्न तापमानों पर मोलर ध्वनि वेग और मोलर संपीड्यता

बी० पी० शुक्ल, वी० मिश्र तथा एस० एन० दुबे

रसायन विज्ञान विभाग, नेशनल डिग्री कालेज, बड़हलगंज, गोरखपुर

[प्राप्त—सितम्बर 23, 1981]

सारांश

ऑक्सीजन-आर्गन द्रव मिश्रणों का विभिन्न तापमानों पर मोलर ध्वनि वेग एवं मोलर संपीड्यता ज्ञात किया गया। राव एवं वादा के अनुसार मोलर ध्वनि वेग तथा मोलर-संपीड्यता ताप पर निर्भर नहीं करते परन्तु ऑक्सीजन-आर्गन द्रव मिश्रण में यह सिद्धान्त सत्य नहीं पाया गया।

Abstract

Molar sound velocity and molar compressibility of $Ar+O_2$ mixtures at different temperatures. *By* B. P. Shukla, V. Misra and S. N. Dube, Chemistry Department, National Degree College, Barhalganj, Gorakhpur.

The molar sound velocity R and molar compressibliity W have been calculated for binary liquid mixtures of oxygen and argon. According to Rao and Wada, the molar sound velocity and molar compressibility were independent of temperature and pressure. But in the present case their rule does not hold good.

1. प्रस्तावना तथा सिद्धान्त

मोलर ध्वनि वेग R और मोलर संपीड्यता W को द्रवों और द्रव मिश्रणों के भौतिक-रासायनिक आचरण के अनुसंधान में व्यापक रूप से प्रयोग किया गया है। आणविक ध्वनि वेग, जिसे राव के स्थिरांक[1, 2] के रूप में भी जाना जाता है, निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$\left(\frac{M}{\rho}\right) U^{1/3} = R \tag{1}$$

अथवा

$$V_m U^{1/3}=R \tag{2}$$

जहाँ U, ρ, M और Vm क्रमशः पराध्वानिक वेग, घनत्व, अणु-भार, और मोलर आयतन हैं। वादा[3] ने आणविक संपीड्यता को निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा परिभाषित किया है

$$W=\left(\frac{M}{\rho}\right) \beta s^{-1/7}=V_m \beta s^{-1/7} \tag{3}$$

जहाँ βs रुद्धोष्म संपीड्यता (Adiabatic compressibility) है। R और W के परिमाण, विशेषतः संयुक्त द्रवों को छोड़ कर, तापमान और दाब से मुक्त होते हैं। अधिकतर तरल मिश्रणों और विलयनों के लिये, ये परिमाण अवयवी द्रवों के मोल अंशों और विलयनों के सान्द्रणों पर लगभग एक रेखीय निर्भरता प्रदर्शित करते हैं। द्रव मिश्रणों का मोलर ध्वनि वेग R एक रेखीयता से तब विचलित होता है जब द्रवों के अवयवों के घनत्व एक दूसरे से काफ़ी भिन्न होते हैं। अकार्बनिक द्रवीभूतों के सन्दर्भ में, आणविक ध्वनि वेग निम्नलिखित रूप ग्रहण करता है

$$R=M^{2/3}/\rho \tag{4}$$

सम्बन्ध $1/\beta s=\rho U^2$

और समीकरण (1) का प्रयोग करते हुए हमें निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है

$$W=(M/\rho^{6/7}) U^{2/7}=M^{1/7} R^{6/7} \tag{5}$$

इस प्रकार W केवल M और R का एक फलन है।

नोमोटो[6] ने इस क्षेत्र में व्यापक कार्य किया है। राव का नियम मैक्सवेल के समीकरण से उष्मा-गतिकीय ढंग से प्राप्त किया गया है[7] तथा इसकी आणविक व्याख्या दी गई है। हाल ही में, माथुर आदि[8] ने वादा के और राव के सम्बन्धों को, द्रव्य माध्यम के लिये अवस्था के समुचित समीकरण से आरम्भ करके और परस्पर क्रिया-विभव के उपयुक्त रूप को लेते हुए, सैद्धान्तिक रूप से प्राप्त किया है।

परिणाम तथा विवेचना

ऑक्सीजन और आर्गन के द्रव मिश्रणों के लिये मोलर ध्वनि वेग R और मोलर संपीड्यता W, ब्लागोय आदि के हाल के आँकड़ों का उपयोग करके, समीकरण (1) से (3) द्वारा आगणित किये गये हैं। R और W के मान विभिन्न तापमानों पर सारणी 1 में अभिलेखित हैं।

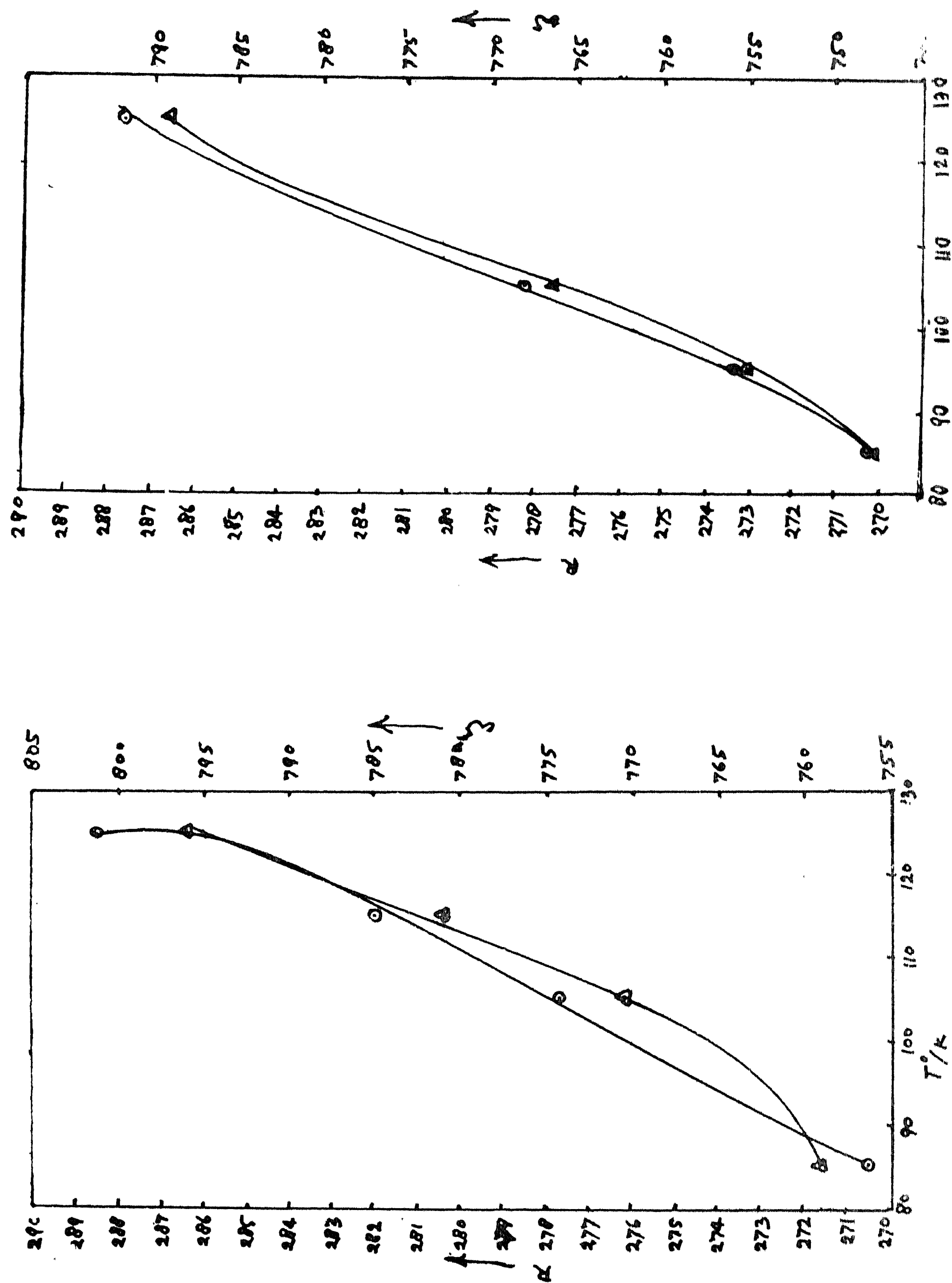
सारणी 1 का अध्ययन प्रकट करता है कि R और W के मान तापमान के प्रभाव से मुक्त नहीं हैं। 20% O_2 के लिये, R और W के मानों में क्रमशः 7.1% और 6% की वृद्धि, तापमान के 85.1 K से 127.0 K तक बढ़ने पर, होती है। 40% O_2 के लिए, R और W के मानों में क्रमशः 5.3% और

.7% वृद्धि होती है जब तापमान 95.0 K से 125.0 K तक बढ़ाया जाता है। 60% O_2 और 80% O_2 के लिये, R और W के मान क्रमशः 6.7% और 4.9% तथा 6.5% और 5.5% बढ़ जाते हैं जब तापमान 85.0 K से 125.2 K तक बढ़ाया जाता है। ऑक्सीजन और आर्गन के मिश्रण के लिये R और W का विचरण (Variation) प्रयोगात्मक त्रुटि से नहीं सम्बद्ध किया जा सकता। अतः, हम निष्कर्षतः कह सकते हैं कि राव और वादा सम्बन्ध ऑक्सीजन और आर्गन के द्रव मिश्रण के सन्दर्भ में असफल होते हैं, यद्यपि ये तमाम जटिल द्रवों के लिये लागू हैं। इस प्रकार, तापमान R और W के मानों पर महत्वपूर्ण प्रभाव डालता है।

सारणी 1

$O_2 + Ar$ द्रव मिश्रणों के विभिन्न तापमानों पर मोलर ध्वनि वेग, R, और मोलर रुद्धोष्म संपीड्यता, W, के मान

$T°/K$	R	W
	(20% O_2)	
85.1	270.6744	763.0187
87.0	270.8714	763.7170
97.0	274.0280	770.8055
107.7	278.4819	782.1492
117.0	283.2858	793.7396
127.0	289.9191	809.3483
	(40% O_2)	
95.0	273.2865	764.3196
105.0	277.3729	774.6650
125.0	287.8986	799.9818
	(60% O_2)	
85.0	270.5301	759.1768
105.2	277.6683	770.4222
115.1	282.0273	781.0555
125.2	288.5415	796.1809
	(80% O_2)	
85.2	270.2835	747.9047
95.1	273.3432	755.3221
105.0	278.2765	766.6574
125.0	287.7169	789.0679



चित्र 1

O_2—Ar द्रव मिश्रण में 60% O_2 के लिए ताप के विपक्ष R तथा W के आलेख
⊙$T°/k$ vs R △=$T°/k$ vs W

चित्र 2

वही, 80% O_2 के लिए ⊙$T°/k$ vs R △=$T°/k=W$

R और W के मान चित्र 1 तथा 2 में परम तापमान (Absolute temperature) के विरुद्ध लेखाचित्र चित्रित किये गये हैं। इन चित्रों का अध्ययन दर्शाता है कि ऑक्सीजन के न्यूनतर सान्द्रणों पर, R और W के मान, ऑक्सीजन के उच्चतर सान्द्रणों की तुलना में, कुछ द्रुत गति से बढ़ते हैं। वानडेल [9] आदि ने भी कुछ सरल संपीड्य द्रवों के लिये राव के और वादा के सम्बन्धों की असफलता का संकेत दिया है।

निर्देश

1. राव, एम० आर०, **इन्डि० जर्न० फिजि०**, 1940, **14**, 109.
2. राव, एम० आर०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1941, **9**, 682.
3. वादा, एक्स०, **जर्न० फिजि० साइ०, जापान**, 1949, **4**, 280.
4. लिटोविट्ज, टी० ए०, तथा ह्रिग्स, जे०, **ऐकॉस्टि० सोसा० अमे०**, 1960, **32**, 1108.
5. पद्मिनी, पी० आर०के० एल०, तथा राव, बी० आर०, **ट्रान्जै० फैराडे सोसा०**, 1963, **58**, 650.
6. नोमोटो, ओ०, **जर्न० फिजि० सोसा० जापान**, 1955, **10**, 31; 1956, **11**, 1146.
7. राव, एम० आर०, **इन्डि० जर्न० प्योर अप्लाइ० फिजि०**, 1965, **3**, 309.
8. माथुर, एस० एस०, गुप्ता, पी० एन० तथा सिन्हा, एस० सी०, **जर्न० फिजि०**, 1971, **A4**, 434.
9. वानडेल, डब्ल्यू० तथा वान ईटरबीक, **फिजि० ऑफ हाइ प्रेशर्स एण्ड कण्डेन्स्ड फेज**, जॉन विले एण्ड सन्स, ईन्क०, न्यूयार्क; 1965, पृ० 350.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 183-187

H-फलन वाले कतिपय द्विगुण समाकल

शांति एस० सोनी

पी०एस०बी०जी०एम०, गणित विभाग, मॉंट्रियल, कनाडा

[प्राप्त—अगस्त 25, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में H-फलन वाले द्विगुण समाकलों का मूल्यांकन किया गया है। कुछ ज्ञात तथा अज्ञात रोचक परिणाम भी दिये गये हैं।

Abstract

Some double integrals involving H-function. *By* Shanti S. Soni, P.S.B.G.M.; Department of Mathematics (Adult Education), Montreal, Canada.

In this paper some double integrals involving H-function have been evaluated. Few interesting known as well as unknown results are also given.

1. प्रस्तावना

फाक्स[3] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्नलिखित विधि से परिभाषित और अंकित किया जावेगा

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} 1(a_j, e_j)_p \\ 1(b_j, f_j)_q \end{matrix}\right]=(2\pi i)^{-1}\int_L \theta(s)\, ds, \tag{1.1}$$

जहाँ $$\theta(s)=\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-f_j\, s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+e_j\, s) \Big/ \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_j\, s) \prod_{j=n+1}^{p} (a_j-e_j\, s) \tag{1.2}$$

रिक्त गुणनफल है जिसे इकाई मान लिया जाता है; $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$ एवं प्राचल ऐसे हैं कि $\Gamma(b_j-f_j\, s)$, $j=1, ..., m$ के पोल $\Gamma(1-a_k+e_k\, s)$, $k=1, ..., n$; $i=\sqrt{-1}$, के किसी पोल से सम्पाती हैं तथा L एक उपयुक्त कंटूर है।

ब्राक्समा[2] ने यह सिद्ध किया है कि समाकल (1.1) परम अभिसारी होता है जब $\theta>0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\theta\pi$

जहाँ $$\theta=\sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=n+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{m} f_j-\sum_{j=m+1}^{q} f_j$$

विस्तृत सूचना के लिए देखें ब्राक्समा[2]।

2. वांछित परिणाम

हमें निम्नलिखित परिणामों एवं गुणों की आवश्यकता होगी।

मैकराबर्ट[5]

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1}\, d\theta=e^{1/2 i\pi\alpha}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{2.1}$$

जहाँ $Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}[ax+b(1-x)]^{-\alpha-\beta}\,dx=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{a^{\alpha}\,b^{\beta}(\alpha+\beta)} \tag{2.2}$$

जहाँ $Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$, a तथा b शून्येत्तर अचर हैं और व्यंजक, $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

शर्मा[7]

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}[ax+b(1-x)]^{-\alpha-\beta}\,{}_2F_1\left[c, d, \alpha, \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta-c-d)}{a^{\alpha}\,b^{\beta}\,\Gamma(\alpha+\beta-c)\,\Gamma(\alpha+\beta-d)} \tag{2.3}$$

जहाँ $Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$, $Re(\alpha+\beta-c-d)>0$, a तथा b शून्येतर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$, शून्य नहीं है।

हाल ही में राठी[6] ने यह प्रदर्शित किया है कि e_j, f_j में से यदि कोई भी शून्य हों तो भी H-फलन की परिभाषा सार्थक होती है और H-फलन का संगत सूत्र प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a, 0), {}_2(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right]=\Gamma(1-a)\,H_{p-1\ q}^{m\ n-1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}{}_2(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

जहाँ $Re(1-a)>0$.

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}{}_1(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_{q-1}, (b, 0)\end{matrix}\right]=\frac{1}{\Gamma(1-b)}\,H_{p\ q-1}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}{}_1(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] \tag{2.5}$$

जहाँ $Re(1-b)>0.$

उसी प्रपत्र में ब्राक्समा[2] ने यह भी प्रदर्शित किया है कि यदि e_j, f_j में से कोई ऋणात्मक हों तो भी H-फलन सार्थक होगा और H-फलन का संगत सूत्र प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ

$$H_{p\ q}^{m\ n}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix}(o,\ -h),\ {}_2(a_j,\ e_j)_p\\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] = H_{p-1\ q+1}^{m+1\ n-1}\left[z\ \middle|\ \begin{matrix}{}_2(a_j,\ e_j)_p\\ (1-a,\ h),\ (b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] \tag{2.6}$$

जहाँ $h>0.$

3. प्रमुख समाकल

इस प्रपत्र में H-फलन तथा हाइपरज्यामितीय फलन वाले निम्नलिखित द्विगुण समाकलों का मूल्यांकन किया गया है।

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}\,(\sin\theta)^{\alpha-1}\,(\cos\theta)^{\beta-1}\,x^{\gamma-1}\,(1-x)^{\delta-1}\,[ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$$\times H_{p\ q}^{m\ n}\left[ze^{i(\lambda+\mu)\theta}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{\mu}(ax)^{u}[b(1-x)]^{v}[ax+b(1-x)]^{-u-v}\middle|\begin{matrix}{}_1(a_j,\ e_j)_p\\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right]d\theta\ dx$$

$$=\frac{e^{1/2\pi\alpha}}{a^{\gamma}\ b^{\delta}}H_{p+4\ q+2}^{m\ n+4}\left[z\ e^{1/2i\lambda}\ \middle|\ \begin{matrix}(1-\alpha,\ \lambda).\ (1-\beta,\ \mu),\ (1-\gamma,\ u),\ (1-\delta,\ v),\ {}_1(a_j,\ e_j)_p\\ {}_1(b_j,\ f_j)_q,\ (1-\alpha-\beta,\ \lambda+\mu),\ (1-\gamma-v,\ u+v)\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ $\lambda,\ \mu,\ u,\ v>0,\ Re[\alpha+\lambda(b_j/f_j)]>0,\ Re[\beta+\mu(b_j/f_j)]>0,\ Re(\gamma+u(b_j/f_j)]>0,$

$Re[\delta+v(b_j/f_j)]>0,\ j=1,\ ...,\ m,\ \theta>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}\theta\pi,$

जहाँ θ वैसा ही है जैसा (1.3) में एवं a तथा b शून्येतर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$, शून्य नहीं है।

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}\,(\sin\theta)^{\alpha-1}\,(\cos\theta)^{\beta-1}\,x^{\gamma-1}\,(1-x)^{\delta-1}\,[ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$$\times{}_2F_1\left[c,\ d,\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]\ \times H_{p\ q}^{m\ n}\left[z\ e^{i(\lambda+\mu)\theta}\,(\sin\theta)^{\lambda}\,(\cos\theta)^{\mu}\right.$$

$$\left.[b(1-x)]^{k}\,[ax+b(1-x)]^{-k}\ \middle|\ \begin{matrix},\ {}_1(a_j,\ e_j)_p\\ ,\ {}_1(b_j,\ f_j)_q\end{matrix}\right]d\theta\ dx$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\, e^{1/2 i\pi\alpha}}{a^{\gamma}\, b^{\delta}} H^{m\; n+3}_{p+3\; q+2}\left[z\, e^{1/2 i\pi\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\alpha,\lambda),(1-\beta,\mu),(1-\delta,k),{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,(1-\alpha-\beta,\lambda+\mu),(1-\gamma-\delta,k)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\lambda, \mu, k>0$, $Re[\alpha+\lambda(b_j/f_j)]>0$, $Re[\beta+\mu(b_j/f_j)]>0$, $Re[\delta+k(b_j/f_j)>0$, $j=1, \ldots, m$, a तथा b शून्येतर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$, शून्य नहीं है; $\theta>0$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\theta\pi$ जहाँ θ वैसा ही है जैसा कि (1.3) में।

उपपत्ति : (3.1) को सिद्ध करने के लिए हम (3.1) के वाम पक्ष को I द्वारा अंकित करते हैं और इसे (1.1) की सहायता से निम्न प्रकार व्यंजित करते हैं :

$$I=\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}[ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$$\times(2\pi i)^{-1}\left\{\int_L\theta(s)\, z^2\, e^{i(\lambda+\mu)\theta s}(\sin\theta)^{\lambda s}(\cos\theta)^{\mu s}\times(ax)^{us}\right.$$

$$\left.\times[b(1-x)]^{vs}[ax+b(1-x)]^{-us-vs}\,ds\right\}d\theta\, dx \tag{3.3}$$

समाकलन के क्रम को यह मानते हुए कि इस प्रक्रिया में सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी है बदलते हैं तो थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें प्राप्त होता है :

$$I=a^u\, b^v\,(2\pi i)^{-1}\int_L\theta(s)\, a^{us}\, b^{vs}\, z^s\left\{\int_0^1 x^{\gamma+us-1}\right.$$

$$\left.\times(1-x)^{\delta+vs-1}[ax+b(1-x)]^{-\gamma-us-vs-\delta}\,dx\right\}$$

$$\times\left\{\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta+\lambda s+\mu s)\theta}(\sin\theta)^{\alpha+\lambda s-1}(\cos\theta)^{\beta+\mu s-1}\,d\theta\right\}ds \tag{3.4}$$

(2.1) तथा (2.2) परिणामों की सहायता से दो आन्तरिक समाकलों का मान निकालने, थोड़े सरलीकरण के बाद इस प्रकार से प्राप्त परिणाम की विवेचना में (1.1) की सहायता लेने पर हमें (3.1) की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार से परिणाम (2.1) तथा (2.3) का उपयोग करते हुए समाकल (3.2) प्राप्त किया जा सकता है।

4. विशिष्ट दशाएँ

हमारे प्रमुख द्विगुण समाकलों से कई विशिष्ट दशाएँ प्राप्त की जा सकती हैं।

(i) यदि हम (3.1) में $\lambda=\mu=u=v=k$, $e_j=f_i=1$, $i=1, \ldots, p$, $j=1, \ldots, q$ रखें तो हमें G-फलन के लिए संगत द्विगुण समाकल प्राप्त होते हैं।

(ii) यदि (3.1) में $u=v=0$ रखें और गुण (2.4) तथा (2.5) का उपयोग करें तो अनन्दानी[1] द्वारा सिद्ध किया गया परिणाम प्राप्त होता है।

(iii) यदि (3.2) में $\lambda=\mu=0$ रखें और गुण (2.4) तथा (2.5) का प्रयोग करें तो हमें कल्ला[4] के द्वारा प्राप्त फल मिलता है।

(iv) (3.1) में $\mu=-\lambda$ रखने और (2.5) तथा (2.6) गुणों का उपयोग करने पर निम्नलिखित रोचक परिणाम प्राप्त होगा :

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} x^{\gamma-1} (1-x)^{\delta-1} [ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$$\times H_{p\ q}^{m\ n} \left[z (\tan\theta)^{\lambda} (ax)^{u} [b(1-x)]^{v} [ax+b(1-x)]^{-u-v} \left| \begin{matrix} {}_1(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_q \end{matrix} \right. \right] d\theta\, dx$$

$$= \frac{e^{1/2 i\pi\alpha}}{a^{\gamma} b^{\delta} \Gamma(\alpha+\beta)} H_{p+3\ q+2}^{m+1\ n+3} \left[z\, e^{i\pi\lambda/2} \left| \begin{matrix} (1-\alpha, \lambda), (1-\gamma, u), (1-\delta, v)\ {}_1(a_j, e_j)_p \\ (\beta, \lambda), {}_1(b_j, f_j)_q, (1-\gamma-v, u+v) \end{matrix} \right. \right]$$

जहाँ $\lambda, u, v>0$, $Re[\gamma+u(b_j/f_j)]>0$, $Re[\delta+v(b_j/b_j)]>0$, $Re[\alpha+(b_j/f_j)]>0, j=1, ..., m;$

$Re[\beta-\lambda(a_j-1/e_j)]>0, j=1, ..., n, \theta>0, |\arg z|<\frac{1}{2}\theta\pi$

जहाँ θ वही है जैसा कि (1.3) में है, a तथा b शून्येतर अचर हैं तथा व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$, शून्य नहीं है।

चूंकि H-फलन एक चर वाले अत्यन्त व्यापक फलनों में से हैं अतः इसके प्राचलों के विशिष्टीकरण से अनेक परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. अनन्दानी, पी० , Rend. Civc. Mat. Partermo., **(2)**, 20, 70-82
2. ब्राक्समा, बी०एल०जे० , Composite. Math. 1964, **15**, 293-341
3. फाक्स, सी० , Trans. Amer. Math. Soc. 1961, **98**, 395-421
4. कल्ला, एस०एल०, A.M.M. de Gomez Lopez : Univ. Nac. Tucuman, Argentina, Rev. Ser. A. 1972, **22**, 165-170.
5. मैकराबर्ट, टी०एम० , Math. Ann. 1960-61, **142**, 450-452
6. राठी, ए० के०, Univ. Nac. Tucuman, Argentina (स्वीकृत)
7. शर्मा, बी०एल० , Quar. J. of Vikram University, 1965

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982 Pages, 189-192

फूरियर श्रेणी की व्युत्पन्न श्रेणी की कोटि

आर० एन० लाल
गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरी तथा प्रौद्योगिकी महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—जुलाई 24, 1980]

सारांश

सातत्य मापांक के प्रतिबंधों को व्यवहृत करते हुए फूरियर श्रेणी की व्युत्पन्न श्रेणी की कोटि प्राप्त की गई है।

Abstract

On the order of derived series of Fourier series. *By* R.N. Lal, Department of Mathematics, Government College of Engineering and Technology, Raipur (M.P.).

In this paper we have obtained the order of derived series of Fourier series by using the condition of modulus of continuity.

1. माना $f(t)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है। माना इसकी फूरियर श्रेणी निम्नवत् है

$$f(t) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty} A_n(t) \tag{1.1}$$

तो $\sum_{1}^{\infty} A_n(t)$ की व्युत्पन्न श्रेणी होगी

$$\sum_{1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_{1}^{\infty} nB_n(t) \tag{1.2}$$

हम लिखेंगे

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t).$$

माना कि $P_n(x)$ n कोटि वाला सर्वोत्तम सन्निकटीकरण त्रिकोणमितीय बहुपद है $f(x)$ का। तो[1]

$$E_n(f)=||f(x)-P_n(x)||$$

$$=O(\omega(1/n, f))$$

जहाँ

$$\omega(t, f)=\sup_{o<|h|\leqslant t}|f(x+h)-f(x)|$$

तथा

$$||P'_n(x)||=O(n\omega(1/n, f)) \tag{1.3}$$

$$||P''_n(u)||=O(n^2\omega(1/n, f)) \tag{1.4}$$

अत:

$$\psi(t)=\chi(t)+O(\omega(1/n, f)) \tag{1.5}$$

जहाँ

$$\chi(t)=\tfrac{1}{2}\{P_n(x+t)-P_n(x-t)\}$$

अब

$$\chi(t)=P_n(x+t)-P_n(x-t) \tag{1.6}$$

$$=O(nt\omega(1/n, f))$$

$$\chi'(t)=P'_n(x+t)+P'_n(x-t) \tag{1.7}$$

$$=O(n\omega(1/n, f))$$

2. सन् 1909 में लेब्रेस्क ने फूरियर श्रेणी के आंशिक योगफल की कोटि के सम्बन्ध में शोधकार्य किया। तब से आज तक इस क्षेत्र में कई कार्यकर्ताओं ने शोधकार्य किया है।[2-5]

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करना है।

प्रमेय : यदि $f(x)$ संतत फलन हो जिसका आवर्त 2π है तो

$$S'_n(x)=O(n\omega(1/n, f))$$

जहाँ $S'_n(x)$ (1.2) का nवाँ आंशिक योगफल है।

3. प्रमेय की उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}=\frac{\sin nt}{t}+O(1) \tag{3.1}$$

यह सरलता से देखा जा सकता है कि

$$rB_r(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{f(x+t)-f(x-t)\}\, r\sin rt\, dt \tag{3.2}$$

जिससे

$$S'_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{f(x+t)-f(x-t)\}\sum_{r=1}^{n} r\sin rt\, dt \tag{3.3}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\sum_{r=1}^{n} r\sin rt\, dt$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}\right\} dt$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \chi(t)\frac{d}{dt}\{D_n(t)\}\, dt.+O(n\omega(1/n,f))$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{n-1} \chi(t)\frac{d}{dt}\{D_n(t)\}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{n-1}^{\pi} \chi(t)\frac{d}{dt}\{D_n(t)\}+O(n\omega(1/n,f))$$

$$=I_1+I_2+O(n\omega(1/n,f)) \tag{3.4}$$

जहाँ

$$I_1=\int_0^{n-1}\chi(t)\frac{d}{dt}(D_n(t))\, dt \tag{3.5}$$

$$=\Big[\chi(t)\, D_n(t)\Big]_0^{n-1}-\int_0^{n-1}\chi'(t)\, D_n(t)\, dt$$

$$=O(n\omega(1/n,f))$$

$$I_2=\int_{n^{-1}}^{\pi}\chi(t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin nt}{t}\right\} dt \tag{3.6}$$

$$=\left[\chi(t)\frac{\sin nt}{t}\right]_{n-1}^{\pi}-\int_{n-1}^{\pi}\chi'(t)\frac{\sin nt}{t}\, dt$$

$$=O(n\omega(1/n,f))$$

अतः (3.4), (3.5) तथा (3.6) से हम सिद्ध करते हैं कि

$$S'_n(x)=O(n\omega(1/n,f))$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देश के लिए लेखक डा० बी०एल० गुप्ता को धन्यवाद देता है ।

निर्देश

1. स्केकिन, एस०बी०, Lzv. Akad. Nauk. USSR Ser. Mat. 1951, **15**, 219-224 (रूसी)

2. कुमारी, एस०, Proc. Nat. Inst. of Sc. India 1957

3. मोहन्ती, आर० तथा नन्दा, एम०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1954, **5**, 566-76

4. वैंग, एफ०टी०, Tohoku Math. Jour., 1934, **39**, 106-110

5. कुमारी, एम०, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1956, 139-51

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 2, April, 1982, Pages 193-202

क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर चुम्बकीय क्षेत्रों की उपस्थिति में केल्विन हेल्महोल्ट्ज अस्थिरता

बी० एम० शर्मा
गणित विभाग, एस०के०एन० कालेज आफ एग्रिकल्चर, जाबनेर (राज०)

सारांश

सामान्य तिर्यक चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में दो अध्यारोपित द्रवों की केल्विन हेल्महोल्ट्ज अस्थिरता का अध्ययन किया गया है। इसमें विभिन्न घनत्वों वाले दो समरूप द्रव जो $z=0$ पर क्षैतिज परिसीमा के द्वारा पृथक्कृत हैं और क्षैतिज गति में हैं, उन पर विचार किया गया है। चुम्बकीय क्षेत्रों के विभिन्न दिग्विन्यासों के लिये विक्षेपण सम्बन्ध प्राप्त करने के उद्देश्य से 'नार्मल मोड़ सल्यूशन' सम्प्रयुक्त किया गया है। यह पाया गया कि अस्थिरता का उद्भव समस्त तरंग संख्याओं के विक्षोभों से होता है।

Abstract

Kelvin-Helmoltz instability in presence of horizontal and vertical magnetic fields. *By* B.M. Sharma, Department of Mathematics, University of Udaipur, S.K.N. College of Agriculture, Jobner (Raj.).

The Kelvin-Helmholtz instability of two superposed fluids has heen investigated in the presence of a general oblique magnetic field. The case of two uniform fluids of different densities in relative horizontal motion separated by a horizontal boundary at $z=0$ has been studied. Normal mode solution has been applied to obtain the dispersion relation for different orientations of magnetic fields and it is found that instability arises for disturbances of all wave numbers.

1. प्रस्तावना

रैले-टेलर अस्थिरता पर अलग-अलग क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर चुम्बकीय क्षेत्रों के प्रभावों का अन्वेषण इसके पूर्व क्रशाल तथा श्वार्जचाइल्ड[1], हाइड[2] एवं चन्द्रशेखर[3] द्वारा किया जा चुका है। एक अर्वाचीऽ प्रपत्र में प्रसाद तथा सिंह[4] ने दो अध्यारोपित द्रवों की रैले-टेलर अस्थिरता पर क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाध

चुम्बकीय क्षेत्रों के संयुक्त प्रभाव का अध्ययन किया है और यह ज्ञात किया है कि क्षैतिज क्षेत्र का स्थायीकारी प्रभावक्षेत्र की लम्ब दिशा के अतिरिक्त अन्य सभी दिशाओं में होता है। किन्तु छोटे से छोटे ऊर्ध्वाधर घटक की उपस्थिति का विस्थायीकारी प्रभाव देखा जाता है। केल्विन-हेल्महोल्ट्ज अस्थिरता पर क्षैतिज चुम्बकीय क्षेत्र के प्रभाव का अध्ययन बजर्कनेस तथा साल्बर्ग[5] ने किया और यह देखा कि अभिस्रवण की दिशा में चुम्बकीय क्षेत्र का विन्यास पर अवरोधक प्रभाव पड़ता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में दो अध्यारोपित द्रवों की केल्विन-हेल्महोल्ट्ज अस्थिरता पर क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर चुम्बकीय क्षेत्रों के संयुक्त प्रभाव पर विचार किया जावेगा।

2. प्रमेय तथा नियन्त्रक समीकरणों का सूत्रीकरण

माना कि दो समरूप द्रव जिनके घनत्व ρ_2 तथा ρ_1 हैं $z=0$ पर क्षैतिज परिसीमा द्वारा पृथक हैं। माना कि ऊपर द्रव का घनत्व ρ_2 नीचे वाले द्रव के घनत्व ρ_1 से कम है जिससे अभिस्रवण की अनुपस्थिति में विन्यास स्थायी रहे। हम यह भी कल्पना करेंगे कि दोनों द्रव स्थिर वेग u_1 तथा u_2 ने अभिस्रवण कर रहे हैं। z-अक्ष को ऊर्ध्वतः ऊपर लिया जाता है। चुम्बकीय क्षेत्र H के घटक Hx तथा H_z क्रमशः x अक्ष तथा z-अक्ष में हैं। विचाराधीन प्रश्न के सम्बद्ध विक्षोभन समीकरण इस प्रकार हैं :

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+U\rho\frac{\partial u}{\partial x}+w\rho\frac{dU}{dz}=-\frac{\partial}{\partial x}(\delta p)+\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z}-\frac{\partial h_z}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho U\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}(\delta p)+\frac{K}{4\pi}\left[H_x\left(\frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{\partial h_x}{\partial y}\right)-H_z\left(\frac{\partial h_z}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial z}\right)\right] \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho U\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial z}(\delta p)-g\delta\rho-\frac{K}{4\pi}H_x\left(\frac{\partial h_x}{\partial z}-\frac{\partial h_z}{\partial x}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta p)+U\rho\frac{\partial(\delta p)}{\partial x}=-w\frac{d\rho}{dz}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{h}=\left(H_x\frac{\partial}{\partial x}+H_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{u}+h_z\,DU, \tag{6}$$

जहाँ $\mathbf{u}$, $\mathbf{H}$, ρ, p, K क्रमशः वेग, चुम्बकीय क्षेत्र, घनत्व दाब तथा चुम्बकीय प्रवेश्यता के लिये आये हैं, $\mathbf{g}$ $(=0, 0, -g)$ गुरुत्वाकर्षण के कारण होने वाला त्वरण है। $\delta\rho$, δp, $\mathbf{h}$ (h_x, h_y, h_z) से घनत्व दाब तथा चुम्बकीय क्षेत्र में होने वाले विक्षोभ अंकित हैं।

व्यवधान को सामान्य बहुलकों (मोड़ों) में विश्लेषित करते हुए हम ऐसे हल ढूंढते हैं जिनकी x, y तथा t पर इस आश्रिता को z के फलन द्वारा दिया जाता है।

x, y तथा t पर इस आश्रिता वाले हलों के लिए समीकरण 1 से लेकर 6 निम्न प्रकार होंगे।

$$i\rho(n+K_xU)u+\rho(DU)w=-ik_x\delta p+K/4\pi\ [H_z(Dh_x-ik_xh_z)], \tag{7}$$

$$i\rho(n+k_xU)v=-ik_y\delta p+K/4\pi\ [H_x(ik_xh_y-ik_yh_x)-H_z(ik_yh_z-Dh_y)], \tag{8}$$

$$i\rho(n+k_xU)w=-D\delta p+k/4\pi[H_x(ik_xh_z-Dh_x)]-g\delta\rho, \tag{9}$$

$$ik_xu+ik_yv+Dw=0 \tag{10}$$

$$i(n+k_xU)\delta\rho+wD\rho=0, \tag{11}$$

$$h_x=\frac{H_xk_xu\cdot iH_zDU}{n+k_nU}+h_zDU, \tag{12}$$

$$h_y=\frac{H_xk_xv-iH_zDv}{n+k_xU}, \tag{13}$$

$$h_z=\frac{H_xh_xw-iH_zDw}{n+k_xU}, \tag{14}$$

अब समीकरण (7) तथा (8) को k_x तथा k_y से गुणा करके जोड़ने पर

$$-\rho(n+k_xU)Dw+\rho k_x(DU)w=-ik^2\delta p$$
$$+K/4\pi[H_x(ik_xk_yh_y-ik^2y)+H_z(k_xDh_x+k_yDh_y-ik^2h_z)]. \tag{15}$$

समीकरण (9) में समीकरण (11) से $\delta\rho$ का मान रखने पर

$$i\rho(n+k_xU)w=-D\delta p+\frac{K}{4\pi}\ [H_x(ik_xh_z-Dh_x)]+i\frac{gw}{n+k_xU}\,D\rho. \tag{16}$$

अब (15) तथा (16) के मध्य δp का विलोपन करने पर

$$D\{\rho(n+k_xU)D-\rho k_x(DU)\}w=\rho k^2(n+k_xU)w$$
$$+K/4\pi[H_x(-k_xk^2h_z-ik^2{}_xDh_x-ik_xk_yDh_y)-H_z(k_xDh^2{}_x+k_jDh^2{}_y-ik^2Dh_z)]. \tag{17}$$

(12), (13) तथा (14) से h_x, h_y तथा h_z के मान रखने पर, सरलीकरण के पश्चात् समीकरण का रूप

$$D\{\rho(n+k_xU)Dw-k_x(DU)w\}-k^2(n+k_xU)w+\frac{KH_z^2}{4\pi(n+k_xU)}$$
$$(D^2-k^2)(D^2+2ik_xLD-k_x{}^2L^2)w$$

$$=i\,K/4\pi\ k_x H_z^2 D^2[DU(k_x H_x w-iH_z Dw)]-K/4\pi\ k_x^2 H_x^2 D[DU(k_x H_x w-iH_z Dw)], \quad (18)$$

होगा जहाँ $$L=\frac{H_x}{H_z}. \quad (19)$$

3. परिसीमा प्रतिबन्ध तथा हल

क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर चुम्बकीय क्षेत्रों के संयुक्त प्रभाव का सूत्रीकरण समीकरण (18) के रूप में हुआ है। जब द्रव एकसमान घनत्वों के होते हैं और $z=0$ पर क्षैतिज परिसीमा द्वारा पृथक्कृत रहते हैं तो (18) निम्न रूप धारण कर लेता है

$$(D^2-k^2)\left(D^2+2ik_x\,DL-k^2_x\,L^2+\rho\frac{4\pi\,(n+k_x\,U)^2}{KH^2_z}\right)w=0. \quad (20)$$

अतः $z<0\ (\rho=\rho_1)$ तथा $z>0\ (\rho=\rho_2)$ के लिए उपयुक्त हल होंगे

$$w_1=A_1\,e^{kz}+B_1\,e^{q_1 z}\ (z<0), \quad (21)$$

तथा $$w_2=A_2\,e^{-kz}+B_2\,e^{q_2 z}\ (z>0). \quad (22)$$

जहाँ $$q_1=-ik_x\,L+i\,(n+k_x U_1)\,(4\pi\rho_1/KH^2_z)^{1/2}, \quad (23)$$

$$q_2=-ik_x\,L+i\,(n+k_x\,U_2)\,(4\pi\rho_2/H^2_z)^{1/2}. \quad (24)$$

यहाँ U_1 तथा U_2 दो द्रवों के अभिस्रवण वेग हैं।

अभी एक और प्रतिबन्ध की तुष्टि शेष बचती है जो समीकरण (18) से उसे $z=0$ पर अन्तरापृष्ठ के आरपार समाकलित करने से निकलती है। स्पष्ट है कि वांछित प्रतिबन्ध है :

$$\triangle_s\,[(n+k_x\,U)^2/KH^2_z]\,\rho(Dw)+(D^2-k^2)\,(Dw+2ik_x\,Lw+k^2_x\,L^2\,Dw)$$
$$+[4\pi\,gk^2/KH^2_z]\,\triangle_s(\rho)w_s=0, \quad (25)$$

जहाँ $\triangle_s\,(\ldots)$ से उस छलांग का सूचन होता है जो $z=0$ पर कोई मात्रा अनुभव करती है।

अन्तराफलक के आरपार w, Dw तथा Dw^2 के सांतत्य से

$$A_1+B_1=A_2+B_2, \quad (26)$$

$$kA_1+q_1B_1=-kA_2+q_2B_2, \quad (27)$$

तथा $$k^2A_1+q^2_1B_1=k^2A_2+q^2_2B_2. \quad (28)$$

प्राप्त होता है। समीकरण (21) तथा (22) से प्राप्त हलों में प्रतिबन्ध (25) का सम्प्रयोग करने पर हमें

$$(kA_1+q_1B_1)\,(\alpha_1 n_1-\alpha_2 n_2)+k^3A_1+q^3{}_1 B_1+V^{-2}\, gk^2\,(\alpha_1-\alpha_2)\,(A_1+B_1)$$
$$+k^3A_2-q^3{}_2 B_2=0, \qquad (29)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\left.\begin{aligned} n_1&=(n+k_x U_1),\\ n_2&=(n+k_x U_2),\\ \alpha_1&=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2},\\ \alpha_2&=\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2},\\ \text{तथा}\quad V^2&=\frac{KH^2{}_z}{4\pi(\rho_1+\rho_2)}\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

समीकरण (26)-(29) से दीर्घकालिक समीकरण प्राप्त होता है

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1\\ k & q_1 & k & -q_2\\ k^2 & q^2{}_1 & -k^2 & -q^2{}_2\\ V^{-2}\,k(n_1\,\alpha_1-n_2\,\alpha_2)+V^{-2}\,q_1(\alpha_1-\alpha_2)+q^3{}_1+ & & k^3 & -q^3{}_2\\ V^{-2}\,gk^2(\alpha_1-\alpha_2)+k^3,\ V^{-2}\,gk^2(\alpha_1-\alpha_2) & & & \end{vmatrix}=0.$$

(q_1-k), (q_2-k) गुणकों को छोड़ने पर सारणिक थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् (32) प्रदान करता है

$$n^3+n^2\left[2k_x\,(U_1\,\alpha_1+U_2\,\alpha_2)+k_x\,\frac{U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}-2ikV(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})\right.$$

$$+n\left[k^2{}_x(\alpha_1\,U^2{}_1+\alpha_2\,U^2{}_2)+2k^2{}_x\,\frac{(U_1\,\alpha_1+\alpha_2\,U_2)\,(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})}{(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})}\right.$$

$$\left.-4ik_x\,kV(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})-2V^2(k^2+k^2{}_x\,L^2)-kg(\alpha_1-\alpha_2)\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}\,\{k^3{}_x(\alpha_1\,U^2{}_1+\alpha_2\,U^2{}_2)\,(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})\}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}\, k_x(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})\,\{2V^2(k^2+k^2_x\, L^2)+gk(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$+2ikk_x\, V(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})\}+2igk^2\, V(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2})=0 \tag{32}$$

किन्तु विमाहीन प्राचलों का अध्ययन सुविधाजनक होता है

$$N=nV_A/g, \tag{33}$$

$$K=kV^2_A/g, \tag{34}$$

जहाँ

$$V^2_A=\frac{K(H^2_x+H^2_z)}{4\pi(\rho_1+\rho_2)}. \tag{35}$$

आगे भी यदि

$$\left.\begin{aligned} L&=\frac{H_x}{H_z}=\tan\theta \\ \text{तथा}\quad \cos\phi&=\frac{k_x}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

रखें तो (32) निम्न में समानीत हो जाता है

$$N^3+N^2\left[2k\cos\phi(U_1\,\alpha_1+U_2\,\alpha_2)+K\cos\phi\,\frac{(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})}{(\alpha_1+\alpha_2)}\right.$$

$$\left.-2ik\cos\theta\,(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})\right]+N\left[K^2\cos\phi\,(\alpha_1\,U^2_1+\alpha_2\,U_2^2)\right.$$

$$+2K^2\cos\phi\left(\frac{(U_1\,\alpha_1+U_2\,\alpha_2)\,(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})}{(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})}\right)$$

$$-4iK^2\cos\theta\cos\phi\,(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})-2K^2\,(\cos^2\theta+\cos^2\phi\,\sin^2\theta)$$

$$\left.-K(\alpha_1-\alpha_2)\right]+(U_1\sqrt{\alpha_1}+U_2\sqrt{\alpha_2})\,\frac{1}{(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})}\Big(K^3\cos^3\phi(\alpha_1\,U^2_1+\alpha_2\,U^2_2)$$

$$-2K^2\cos\phi\,(\cos^2\theta+\cos^2\phi\,\sin^2\theta)-K^2\cos\phi\,(\alpha_1-\alpha_2)\Big)$$

$$+2iK^2\cos\theta\,(\sqrt{\alpha_1}-\alpha_2)=0. \tag{37}$$

$\phi=90°$ होने पर समीकरण बजर्कनेस तथा सोलबर्ग द्वारा प्राप्त संगत समीकरण में समानीत हो जाता है। समीकरण (37) N में त्रिघाती है और इसमें काल्पनिक पद सन्निहित हैं अतः इससे सम्मिश्र मूल प्राप्त होते हैं। अतः इस निकाय में समस्त तरंग संख्याओं के विक्षोभों के लिए अस्थिरता पाई जाती

है । विक्षेपण सम्बन्धों को θ तथा ϕ के विभिन्न मानों के लिए अध्ययन किया जा सकता है । सारणी 1 में विक्षेपण सम्बन्धों पर ϕ के प्रभाव दर्शाये गए हैं जब चुम्बकीय क्षेत्र ऊर्ध्वरेखा से 75° कोण पर नत होता है । इस सारणी में ϕ के विभिन्न मानों (0°, 45°, 90°) के लिए परिणाम संगणित किए गए हैं । यह देखा जाता है कि ϕ के साथ ही N घटता है अर्थात् जब क्षोभन सदिश $(k_x, k_y, 0)$ का नति बढ़ता है तो अस्थिरता घटती है । हम यह भी देखते हैं कि प्रत्येक ϕ के लिए N का मान अनन्त रूप से बढ़ता जाता है ।

विक्षेपण सम्बन्धों पर θ के प्रभाव को θ के विभिन्न मानों (0°, 45°, 90°) के लिए सारणी 2, 3 तथा 4 में अंकित किया गया है । यह पाया गया कि $\theta=90°$ को छोड़कर प्रत्येक अवस्था में अस्थिरता प्रारम्भ हो जाती है । इस तरह क्षैतिज चुम्बकीय क्षेत्र का विन्यास पर स्थायीकारी प्रभाव होता है जबकि अल्प ऊर्ध्वाधर घटक की उपस्थिति मात्र का विस्थायीकारी प्रभाव होता है । $\phi=0°$ तथा $\phi=45°$ मानों के लिए बढ़ने के साथ ही K के प्रत्येक मान के लिए N घटता जाता है किन्तु K के साथ ही N बढ़ता जाता है । $\phi=90°$ के लिए N का वास्तविक अंश K के लघु मानों के लिए θ के बढ़ने के साथ ही घटता जाता है और फिर K के दीर्घ मानों के बाद बढ़ता है । किन्तु N के काल्पनिक अंश के लिए यह आचरण पलट जाता है । N का काल्पनिक अंश K के लघु मानों के लिए θ के बढ़ने के साथ साथ बढ़ता है किन्तु K के दीर्घ मानों के लिए N घटता जाता है । यह आचरण विशेष सारणी 4 में देखा जा सकता है । उपरोक्त विवेचना $\alpha_2=4.0$ तथा $\alpha_1=1.0$ से सम्बद्ध है ।

यदि हम केवल ऊर्ध्वाधर चुम्बकीय क्षेत्र पर विचार करें (क्षैतिज चुम्बकीय क्षेत्र की अनुपस्थिति में $\phi=90°$) तो समीकरण (37) निम्न रूप धारण कर लेता है

$$N^3+N^2\, 2iK \cos\theta\, (\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})-N[2K^2\cos^2\theta+K(\alpha_1-\alpha_2)]$$
$$+2iK^2\cos\theta\,(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2})=0. \qquad (38)$$

पुनः समीकरण (38) N में त्रिघाती है और सम्मिश्र मूल प्रदान करता है अतः यह निकाय सदैव अस्थायी रहता है । यह उल्लेखनीय है कि U_1 तथा U_2 अस्थिरता के मानदण्डों को प्रभावित नहीं करते, जब हम चुम्बकीय क्षेत्र की लम्ब दिशा में अभिस्रवण वेगों पर विचार करते होते हैं ।

अतः यह रैले-टेलर अस्थिरता की दशा है । इस प्रकार हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि विन्यास पर क्षैतिज चुम्बकीय क्षेत्र का स्थायीकारी प्रभाव होता है जबकि ऊर्ध्वाधर चुम्बकीय क्षेत्र का विस्थायीकारी ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

यह शोधकार्य विश्वविद्यालय अनुदान आयोग द्वारा प्रदत्त आर्थिक सहायता के अन्तर्गत सम्पन्न हुआ । लेखक बिरला इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी पिलानी का आभारी है जिसने संगणन कार्य की सुविधायें प्रदान कीं ।

सारणी 1

$\alpha_2=4.0$, $\alpha_1=1.0$, $U_2=4.0$, $U_1=1.0$ तथा $\theta=75°$ के लिए विक्षेपण सम्बन्ध

क्रमांक	K	N $\phi=0°$	N $\phi=45°$	N $\phi=90°$
1.	0.0	0.0000+i0.0000	0.0000+i0.0000	0.0000+i0.0000
2.	0.1	−0.8139+i0.7937	−0.5707+i0.5771	−0.1418—i0.2372
3.	0.2	−1.5901+i1.5412	−1.0822+i1.0851	−0.2561−i0.1042
4.	0.4	−2.6258+i2.6012	−1.3846+i1.5434	−0.4060−i0.0628
5.	0.5	−3.9121+i3.7701	−2.5903+i2.5798	−0.5668+i0.1323
6.	0.8	−6.2338+i5.9830	−4.0874+i4.0595	−0.6774+i0.3467
7.	1.0	−7.7808+i7.4507	−5.0820+i5.0083	−1.4047+i0.9640
8.	1.5	−11.647+i11.090	−7.5574+i7.3608	−1.8021+i1.0123
9.	2.0	−15.512+i14.687	−10.016+i9.6348	−2.4001+i1.4198
10.	2.5	−19.376+i18.248	−12.460+i11.826	−3.5108+i1.8138
11.	3.0	−23.238+i21.756	−14.885+i13.933	−4.7334+i2.2446

सारणी 2

$\alpha_2=4.0$, $\alpha_1=1.0$, $U_2=4.0$, $U_1=1.0$ तथा $\phi=0°$ के लिए विक्षेपण सम्बन्ध

क्रमांक	K	N $\theta=60°$	N $\theta=75°$	N $\theta=85°$
1.	0.0	0.000+i0.0000	0.0000+i0.0000	+0.0000+i0.0000
2.	0.1	−0.0254+i0.0115	−0.0242+i0.0060	−0.0239+i0.0020
3.	0.2	−0.1462+i0.0227	−0.1360+i0.0119	−0.1353+i0.0040
4.	0.4	−0.3735+i0.0459	−0.3694+i0.0240	−0.3681+i0.0081
5.	0.5	−0.4927+i0.0576	−0.4876+i0.0302	−0.4859+i0.0102
6.	1.0	−1.0950+i0.1164	−1.0854+i0.0609	−1.0856+i0.0206
7.	1.5	−1.7567+i0.1753	−1.6913+i0.0918	−1.6875+i0.0310
8.	2.0	−2.3245+i0.2343	−2.3045+i0.1226	−2.2987+i0.0414
9.	2.5	−2.9104+i0.2933	−2.7658+i0.1535	−2.6754+i0.0519
10.	3.0	−3.5856+i0.3522	−3.5557+i0.3522	−3.5450+i0.0623

सारणी 3

$\alpha_2=4.0$, $\alpha_1=1.0$, $U_2=4.0$, $U_1=1.0$ तथा $\phi=45°$ के लिए विक्षेपण सम्बन्ध

क्रमांक	K	N $\theta=60°$	N $\theta=75°$	N $\theta=85°$
1.	0.0	0.0000+i0.0000	0.0000+i0.0000	0.0000+i0.0000
2.	0.1	−0.5925+i0.6661	−0.5707+i0.5771	−0.5544+i0.5199
3.	0.2	−1.1386+i0.2687	−1.0834+i1.0851	−1.0390+i0.9680
4.	0.4	−2.2198+i0.4580	−2.0891+i2.1767	−1.9890+i1.8480
5.	0.5	−2.7590+i0.0481	−2.5900+i2.5790	−2.4591+i2.2820
6.	1.0	−5.4510+i0.9590	−5.0821+i5.008	−4.7920+i4.4100
7.	1.5	−8.1270+i8.8100	−7.5570+i7.3601	−7.0981+i6.4500
8.	2.0	−10.819+i11.570	−10.017+i9.6340	−9.3781+i8.4280
9.	2.5	−13.490+i14.261	−12.461+i11.834	−11.620+i10.312
10.	3.0	−16.760+i16.892	−14.880+i13.930	−13.841+i12.102

सारणी 4

$\alpha_2=4.0$, $\alpha_1=1.0$, $U_2=4.0$, $U_1=1.0$ तथा $\phi=90°$ के लिए विक्षेपण सम्बन्ध

क्रमांक	K	N $\theta=60°$	N $\theta=75°$	N $\theta=85°$
1.	0.0	0.0000+i0.0000	0.0000+i0.0000	0.0000+i0.0000
2.	0.1	−0.1638+i0.0301	−0.1418−i0.0480	−0.1276−i0.0534
3.	0.2	−0.2464+i0.0256	−0.2214−i0.0468	−0.2030−i0.0522
4.	0.3	−0.3112+i0.0135	−0.2882−i0.0416	−0.2350−i0.0501
5.	0.4	−0.3663+i0.0042	−0.3489−i0.0274	−0.3021−i0.0449
6.	0.5	−0.4148+i0.0266	−0.4062−i0.0040	−0.3767−i0.0225
7.	1.0	−0.5854+i0.2162	−0.6774+i0.3103	−0.9612+i0.1700
8.	1.5	−0.6871+i0.5609	−1.4080+i0.9600	−1.7930+i0.3336
9.	2.0	−1.3931+i1.1990	−2.4001+i1.4300	−2.7830+i0.4792
10.	2.5	−1.8260+i3.5540	−3.5100+i1.8300	−3.9050+i0.6188
11.	3.0	−3.1400+i4.3430	−4.7330+i2.2440	−5.1480+i0.7554

निर्देश

1. क्रशाल, एम० तथा श्वार्जचाइल्ड, एम०, Proc. R. Soc. 1954, A **223**, 348-60
2. हाइड, आर० Proc. R. Soc., 1955, A **233,** 376-96
3. चंद्रशेखर, एस० Hydrodynamic and Hydromagnetic stability, क्लैरेंडन प्रेस, आक्सफोर्ड 1961, पृष्ठ **457-66**
4. प्रसाद, सी० तथा बानी सिंह०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इण्डिया**, 1972, **42** B, I
5. बजर्कनेस, वी०, इत्यादि Physikalische Hydrodynamik, अध्याय 11, स्प्रिंगर, बर्लिन, 1933

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायें। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।
2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।
7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगें।
8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80।
9. प्रत्येक लेख के 25 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।
10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

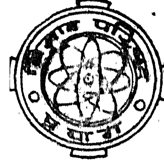
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.



संशोधित मूल्य
वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 12 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 1·5 पौंड या 4 डालर

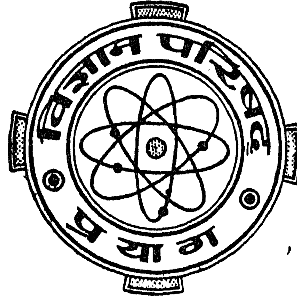
Revised Rates
Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 12
Per Vol. Rs. 3 *or* 1·5 *or* $ 4

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
82229

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika
विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 25 July 1982 No. 3



The Research Journal of the Hindi Science Academy
Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 24, No. 3, July, 1982, Pages 203-216

संयुग्मी फूरियर श्रेणी तथा इसकी अवकलित श्रेणी का लघुगणकीय माध्य (L)

आर० बी० सक्सेना
गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—अप्रैल 3, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य शर्मा तथा राव द्वारा प्राप्त दो परिणामों में सुधार लाना है। इसके लिए दो प्रमेय सिद्ध किये गये हैं।

Abstract

On the logarithmic (L) mean of the conjugate Fourier series and its differentiated series. *By* R.B. Saxena, Department of Mathematics, University of Sagar, Sagar.

The object of this paper is to improve upon the results of Sharma and Rao. Thus we prove the following theorems.

THEOREM 1 If

$$\psi(t)=\int_t^{\pi} \frac{\psi_1(\mu)}{\mu}\, du=O(\log 1/t),\ (t\to+0)$$

then $\sigma_{2k}-\sigma_k=D/\pi \log 2$

THEOREM 2 If

$$H(t)=\int_t^{\pi} \frac{h_1(u)}{u}\, du=O(\log 1/t),\ (t\to+0)$$

then $\tilde{\sigma}_{2k}-\tilde{\sigma}_k=\frac{D}{\pi}\log 2$

1. एक शोध पत्र में बार्वीन[1] ने एक अनन्त अनुक्रम $\{S_n\}$ के लिए संकलनीयता की एक नवीन विधि निर्मित की है।

इशिगुरा[4] ने सिद्ध किया है कि यदि कोई श्रेणी रीज़ की संकलनीयता की लघुगणकीय विधि द्वारा संकलनीय है तो यह (L) विधि द्वारा भी संकलनीय है। उन्होंने[5] लघुगणकीय प्रकार की इन दोनों संकलनीयता विधियों को जोड़ने वाला टौबेरियन प्रतिबन्ध भी दिया है।

2. माना कि $f(t)$ लेबेस्क फलन है जो $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय एवं आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। फूरियर श्रेणी तथा $t=x$ पर फलन $f(t)$ के साथ सम्बद्ध इसकी संयुग्मी श्रेणी

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x) \tag{2.1}$$

तथा

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nx-a_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(x) \tag{2.2}$$

हों तो संगत व्युत्पन्न श्रेणियाँ

$$\Sigma n\, B_n(x), \tag{2.3}$$

तथा

$$-\Sigma n\, A_n(x). \tag{2.4}$$

हैं।

माना कि S_n तथा $S^-{}_n$ क्रमशः श्रेणी (2.2) तथा (2.4) के nवें आंशिक योगफल है और σ_k तथा $\bar{\sigma}$, क्रमशः S_n तथा S_n^- के (L) परिवर्त को सूचित करते हैं।

हम लिखेंगे

$$\phi(t)=\tfrac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2s\}$$

$$\psi(t)=\{f(x+t)-f(x-t)-D\}$$

$$g(t)=\frac{\psi(t)}{4\sin t/2}-C$$

$$h(t)=\frac{\psi(t)}{t}-D$$

$$\phi_1(t)=1/t\int_0^t\phi(u)\,du$$

$$g_1(t)=1/t\int_0^t g(u)\,du$$

$$h_1(t)=1/t\int_0^t h(u)\,du$$

$$\psi_1(t)=1/t \int_0^t \psi(u)\, du$$

जहाँ s, C तथा D x के फलन है।

सियांग[3] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की हैं :

प्रमेय H : यदि किसी काल्पनिक $0<\delta<\pi$ के लिए

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du=0\,(t \log 1/t) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to+0 \tag{2.5}$$

$$\int_t^\delta \frac{|\phi(u)|}{u}\, du=0\,(\log 1/t) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to+0 \tag{2.6}$$

तो $f(t)$ की फूरियर श्रेणी x पर S तक संकलनीय (L) है।

यह ज्ञात है[6] कि

$$\int_t^\pi \frac{|\psi(u)|}{u}\, du=0\,(\log 1/t) \tag{2.7}$$

का अर्थ होता है

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du=0\,(t \log 1/t) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to+0$$

इस प्रकार प्रमेय H के (2.5) का अर्थ है (2.6)।

अपनी परवर्ती टिप्पणी में मोहन्टी तथा नंदा[8] ने फूरियर श्रेणी के सिद्धान्त में इस विधि के कुछ सम्प्रयोग किये हैं। यही नहीं, नंदा[9] ने सियांग के परिणाम में तथा स्वयं अपने परिणाम[8] में कुछ सुधार किया है और निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किये हैं :

प्रमेय N_1 : यदि

$$\Phi(t)=\int_t^\pi \frac{\phi(t)}{u}\, du=0(\log 1/t)\ (t\to+0), \tag{2.9}$$

तो श्रेणी (2.1) $t=x$ के लिए s तक संकलनीय (L) है।

प्रमेय N_2 : यदि

$$G(t)=\int_t^\pi \frac{g(u)}{u}\, du=0(\log 1/t)\ (t\to+0), \tag{2.10}$$

तो $t=x$ पर (2.1) की प्रथम अवकलित श्रेणी मान C तक संकलनीय (L) है।

अनुक्रम $\{n\ B_n(x)\}$ की संकलनीयता (L) के सम्बन्ध में मोहन्टी तथा नंदा ने[8] सिद्ध किया है कि

प्रमेय MN : यदि

$$\int_t^{\pi} \frac{h(u)}{u}\, du = 0\ (\log 1/t),\ (t \to +0) \tag{2.11}$$

तो अनुक्रम $\{n\ B_n(x)\}$ D तक संकलनीय (L) है ।

इसके बाद नंदा तथा दास[10] ने (2.9), (2.10) तथा (2.11) फलों में कुछ सुधार करके निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किये हैं :

प्रमेय NO_1 : यदि

$$\Phi(t) = \int_t^{\pi} \frac{\phi_1(u)}{u}\, du = 0(\log 1/t),\ (t \to +0) \tag{2 12}$$

तो श्रेणी (2.1) $t = x$ पर s तक संकलनीय (L) है ।

प्रमेय NO_2 : यदि

$$G(t) = \int_0^{\pi} \frac{g_1(u)}{u}\, du = 0(\log 1/t),\ (t \to +0), \tag{2.13}$$

तो श्रेणी (2.3) योग C तक संकलनीय (L) है ।

प्रमेय NO_3 : यदि

$$H(t) = \int_t^{\pi} \frac{h_1(u)}{u}\, du = 0(\log 1/t),\ (t \to +0) \tag{2.14}$$

तो अनुक्रम $\{n\ B_n(x)\}$ मान D तक संकलनीय (L) है ।

शर्मा तथा राव[11] ने क्रमशः श्रेणी (2.2) तथा (2.4) के लिये (2·9) तथा (2.10) के संगत निम्नलिखित परिणामों को सिद्ध किया है ।

प्रमेय SR_1 : यदि

$$\psi_1(t) = \int_t^{\pi} \frac{\psi(t)}{t}\, dt = 0(\log 1/t),\ (t \to +0),$$

तो
$$\sigma_{2k} - \sigma_k = \frac{D}{\pi} \log 2.$$

प्रमेय SR_2 : यदि

$$\int_t \frac{h(t)}{t}\, dt = 0(\log 1/t), \tag{2.16}$$

$$\bar{\sigma}_{2k}-\bar{\sigma}_k=\frac{D}{\pi}\log 2.$$

3. प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य परिणाम (2.15) तथा (2·16) को सुधारना है। वास्तव में हम निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 : यदि

$$\Psi(t)=\int_t^\pi \frac{\psi_1(u)}{u}\,du=0(\log 1/t),\ (t\to+0), \tag{3.1}$$

तो

$$\sigma_{2k}-\sigma_k=\frac{D}{\pi}\log 2.$$

प्रमेय 2 : यदि

$$H(t)=\int_t^\pi \frac{h_1(u)}{u}\,du=0(\log 1/t),\ (t\to+0), \tag{3.2}$$

तो

$$\bar{\sigma}_{2k}-\bar{\sigma}_k=\frac{D}{\pi}\log 2.$$

हमें अपने प्रमेयों की उपपत्ति के लिए निम्नलिखित आकलों की आवश्यकता पड़ेगी।

$$\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}=0\left(\frac{t}{(1-x)^2}\right) \text{ क्योंकि } 0<t<(1-x), \text{ के लिए} \tag{3.3}$$

$$\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}=0\,(1/t) \qquad (1-x)<t<\pi, \text{ के लिए} \tag{3.4}$$

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos t+x^2}=0\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad 0<t<1-x. \text{ के लिए} \tag{3.5}$$

तथा

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos t+x^2}=0\left(\frac{1-x}{t^2}\right) \qquad 1-x<t<\pi. \text{ के लिए} \tag{3.6}$$

4. **प्रमेय 1 की उपपत्ति** : हमें ज्ञात है कि

$$S_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{f(x+t)-f(x-t)\}\cot t/2\,(1-\cos nt)\,dt+0(1)$$

$$\leqslant\frac{D}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos nt}{t}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\,[\cot t/2-2/t]\,(1-\cos nt)dt$$

$$+1/\pi\int_0 \psi(t)\,\frac{1-\cos nt}{t}\,dt+0(1)$$

$$\leqslant \frac{D}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos nt}{t}\,dt+1/\pi\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{1-\cos nt}{t}\,dt+0(1)$$

अब प्रायः सर्वत्र

$$\psi(t)=\frac{d}{dt}\{t\,\psi_1(t)\}.$$

अतः $$S_n\leqslant \frac{D}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos nt}{t}\,dt+1/\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos nt}{t}\,\frac{d}{dt}\,(t\,\psi_1(t))dt+0(1)$$

इस प्रकार $$|\log(1-x)|\,\sigma_k\leqslant \frac{D}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kt}{t}\cdot\frac{x^k}{k}\,dt+$$

$$1/\pi\int_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kt}{t}\,\frac{x^k}{k}\,\frac{d}{dt}\,(t\,\psi_1(t))dt+0\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\right)$$

$$=\frac{D}{\pi}\left(\int_0^\eta+\int_\eta^\pi\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kt}{kt}\,x^k\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kt}{t}\cdot\frac{x^k}{k}\,\frac{d}{dt}\,(t\,\psi_2(t))\,dt$$

$$+0\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\right)$$ जहाँ $\eta=(!-x)$

$$=I_1+I_2+I_3+0\left(\log\frac{1}{1-x}\right),$$ माना (4.1)

शर्मा तथा राव[11] का अनुसरण करने पर

$$I_1=0(1) \qquad (4.2)$$

$$I_2=\frac{D}{\pi}\left\{\log\frac{1}{1-x}\right\}^2 \qquad (4.3)$$

हम निम्नलिखित पर विचार करेंगे

$$I_3=\left(\int_0^\eta+\int_\eta^\pi\right)\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kt}{t}\cdot\frac{x^k}{k}\cdot\frac{d}{dt}\,(t\,\psi_1(t))\,dt$$

$=I_{3\cdot1}+I_{3\cdot2}$, माना (4.4)

अब

$$I_{3\cdot 1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\, 0(\, k^2\, .\, t^2)\, .\, \frac{d}{dt}\,(t\,\psi_1\,(t))\, dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\, 0(1) \int_0^{\eta} t \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \frac{d}{dt}\,(t\,\psi_1\,(t))\, dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\; 0\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) \int_0^{\eta} t\, \frac{d}{dt}(t\,\psi_1\,(t))\, dt$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$I_{3\cdot 1}=0\,\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)\left[\left\{t\,.\,t\,\psi_1\,(t)\right\}_0^{\eta}-\int_0^{\eta} t\,\psi_1\,(t)\, dt\,\right]$$

$$=0\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)\int_0^{\eta}\frac{\psi_1(t)}{t}\, t^2\, dt$$

$$=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=0(1) \tag{4.5}$$

पुनश्च

$$I_{3\cdot 2}=\frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{kt}\,\frac{d}{dt}(t\,\psi_1\,(t))\, dt-\frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{kt}$$

$$\times x^k\,\frac{d}{dt}\,(t\,\psi_1\,(t))\, dt$$

$$=J_1-J_2,\ \text{माना} \tag{4.6}$$

निम्नलिखित पर विचार करें

$$J_1=\frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi}\frac{1}{t}\log\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{d}{dt}\,(t\,\psi_1\,(t))\, dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\log\left(\frac{1}{1-x}\right)\int_{\eta}^{\pi}\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}(t\,\psi_1\,(t))\, dt$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$J_1=\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{1+x}\right)\left[\left\{\frac{1}{t}\,t\,\psi_1\,(t)\right\}_{\eta}^{\pi}+\int_{\eta}^{\pi}\frac{1}{t^2}\,.\,t\,\psi_1\,(t)\, dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{1-x}\right)\int_{\eta}^{\pi}\frac{\psi_1(t)}{t}\, dt$$

$$=0\left(\log\,\frac{1}{1-x}\right)^2 \tag{4.7}$$

आगे भी

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_\eta^\pi \frac{1}{t} \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1}{1-2x \cos t + x^2} \right) \frac{d}{dt} (t\, \psi_1(t))\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\eta^\pi \frac{1}{t} \,.\, 0 \left(\log \frac{1}{t^2} \right) \frac{d}{dt} (t\, \psi_1(t))\, dt$$

$$= 0 \left(\log \frac{1}{\eta} \right) \int_\eta^\pi \frac{1}{t} \frac{d}{dt} (t\, \psi_1(t))\, dt,$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$_2J = 0 \left(\log \frac{1}{\eta} \right) \left[\left\{ \frac{1}{t}\, t\, \psi_1(t) \right\}_\eta^\pi + \int_\eta^\pi \frac{1}{t^2}\, t\, \psi_1(t)\, dt \right]$$

$$= 0 \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^2 \tag{4.8}$$

अब (4.4) से लेकर (4.8) तक से

$$I_3 = 0 \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^2 \tag{4.9}$$

अन्त में (4.1), (4.2), (4.3) तथा (4.9) से

$$\sigma_k = \frac{D}{\pi} \left\{ \log \frac{1}{1-x} \right\} + 0 \left\{ \log \frac{1}{1-x} \right\}.$$

अब

$$\sigma_{2k} - \sigma_k = \frac{D}{\pi} \{ \log (1-x^2) - \log (1-x) \} + 0 \{ \log (1-x^2) - \log (1-x) \}$$

$$= \frac{D}{\pi} \log 2 \text{ ज्यों ज्यों } x \to 1.$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति

$$\nu A_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \,.\, \nu \cos \nu t\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t\, h(t) \,.\, \nu \cos (\nu t) dt$$

$$+ \frac{D}{\pi} \int_0^\pi t\nu \cos (\nu t)\, dt$$

अतः
$$\bar{S}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\ h(t)\frac{d}{dr}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu t\right)dt$$

$$+\frac{D}{\pi}\int_0^\pi t\ \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu t\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi th(t)\ \frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2}\,(1-\cos nt)+\sin nt\right)dt$$

$$+\frac{D}{\pi}\int_0^\pi t\ \frac{d}{dt}\left(\cos\frac{t}{2}\,(1-\cos nt)+\sin nt\right)dt,$$

अतः हमें प्राप्त होता है

$$\pi\mid\log(1-x)\mid\bar{\sigma}_k = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi t\ h\ (t)\ \mathrm{cosec}^2\frac{t}{2}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kt}{k}\,x^k\ dt$$

$$+\int_0^\pi t\ h(t)\cot t/2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin t}{\mathrm{k}}\,x^k\ dt$$

$$+\int_0^\pi t\ h(t)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cos kt}{k}\,x^k\ dt$$

$$+\frac{D}{2}\int_0^\pi t\ \mathrm{cosec}^2\ \frac{t}{2}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kt}{k}\,x^k\ dt$$

$$+D\int_0^\pi t\cot\ \frac{t}{2}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin kt}{k}\ x^k\ dt$$

$$+D\int_0^\pi t\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cos kt}{k}\ x^k\ dt$$

$$=\bar{\sigma}_{k\cdot 1}+\bar{\sigma}_{k\ 2}+\bar{\sigma}_{k\cdot 3}+\bar{\sigma}_{k\cdot 4}+\bar{\sigma}_{k\cdot 5}+\bar{\sigma}_{k\cdot 6},\ \text{माना} \tag{5.1}$$

शर्मा तथा राव[11] का अनुसरण करने पर

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 4}=0(1)+D\ \left\{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}^2 \tag{5.2}$$

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 5}=0\ \left(\log\frac{1}{1-x}\right) \tag{5.3}$$

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 6}=0\ \left(\log\frac{1}{1-x}\right) \tag{5.4}$$

अब प्राय: सर्वत्र

$$h(t)=\frac{d}{dt}\ (t\ h_1(t))$$

निम्नलिखित पर विचार करें

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 1}=\left(\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\right) t\ h(t)\ \text{cosec}^2\ \frac{t}{2}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \quad \cos kt}{k}\ x^k\ dt$$

जहाँ $\eta=(1-x)$

$$\sigma_{k\cdot 1}=\bar{\sigma}_{k\cdot 1\cdot 1}+\bar{\sigma}_{k\cdot 1\cdot 2}, \text{ माना} \tag{5.5}$$

अब

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 1\cdot 1}=\tfrac{1}{2}\int_0^{\eta} t\ h(t)\ .\ 0\left(\frac{1}{t^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} 0\left(\frac{k^2t^2}{k}\right) x^k\ dt$$

$$=0(1)\int_0^{\eta} t\ h(t)\quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k\ dt$$

$$=0\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)\int_0^{\eta} t\ \frac{d}{dt}\ (t\ h_1(t))\ dt$$

खण्डश: समाकलित करने पर

$$\sigma_{k\cdot 1\cdot 1}=0\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)\left[\left\{t^2\ h_1(t)\right\}_0^{\eta}-\int_0^{\eta} t\ .\ \frac{h_1(t)}{t}\ dt\right]$$

$$=0\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right).\ \eta^2\ .\ 0\left(\log\frac{1}{\eta}\right)$$

$$=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right). \tag{5.6}$$

आगे भी

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 1\cdot 2}=\tfrac{1}{2}\int_{\eta}^{\pi} t\ h(t)\ \text{cosec}^2\ \frac{t}{2}\ .\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k}\ x^k\right)dt$$

$$=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right)\int_{\eta}^{\pi} t\ h(t)\ .\ \frac{1}{t^2}\ dt$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{\eta}^{\pi} t\ h(t)\ \text{cosec}^2\ \frac{t}{1}\ .\ \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{1-2x\cos t+x^2}\ dt$$

$$=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right)\int_{\eta}^{\pi}-\frac{h(t)}{t}\ dt$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{\eta}^{\pi}\ t\ h(t)\ .0\left(\frac{1}{t^2}\right).\ 0\left(\log\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=0\left(\log \frac{1}{1-x}\right) \cdot \int_{\eta}^{\pi} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} (t\, h_1(t))\, dt$$

$$+0(1) \int_{\eta}^{\pi} \frac{h(t)}{t} \log \frac{1}{t}\, dt$$

$$=J_1+J_2, \text{ माना} \quad (5.7)$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$J_1=0\left(\log \frac{1}{1-x}\right)\left[\left\{\frac{1}{t}\ t\, h_1(t)\right\}_{\eta}^{\pi}+\int_{\eta}^{\pi} \frac{1}{t^2}\ t\, h_1(t)\, dt\right]$$

$$=0\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2. \quad (5.8)$$

आगे भी

$$J_2=0(1) \int_{\eta}^{\pi} \frac{1}{t} \log \frac{1}{t} \frac{d}{dt} (t\, h_1(t))\, dt$$

$$=0\left(\log \frac{1}{\eta}\right) \int_{\eta}^{\pi} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} (t\, h_1(t))\, dt$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$J_2=0\left(\log \frac{1}{1-x}\right)\left[\left\{\frac{1}{t}\ t\, h_1(t)\right\}_{\eta}^{\pi}+\int_{\eta}^{\pi} \frac{1}{t^2}\ t\, h_1(t)\, dt\right]$$

$$=0\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2. \quad (5.9)$$

अतः (5.8) तथा (5.9) से

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 1\cdot 2}=0\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2 \quad (5.10)$$

अब निम्नलिखित पर विचार करें

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 2}=\left(\int_0^{\pi}+\int_{\eta}^{n}\right) t\, h(t) \cot \frac{t}{2} \sum_{k=1}^{\infty} x^k . \sin kt\, dt$$

$$=\left(\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\right) t\, h(t) \cot \frac{t}{2} \frac{x \sin t}{1-2x \cos t+x^2}\, dt$$

$$=\bar{\sigma}_{k\cdot 2\cdot 1}+\bar{\sigma}_{k\cdot 2\cdot 2}, \text{ माना} \quad (5.11)$$

अब

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 2\cdot 1}=\int_0^{\eta} t\, h(t)\,.\,0\left(\frac{1}{t}\right).\, 0\left(\frac{t}{(1-x)^2}\right) dt, \text{ (3.3) से}$$

$$=0\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\int_0^{\eta} t\, h(t)\, dt$$

$$=0\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\int_0^{\eta} t\, \frac{d}{dt}\,(t\, h_1(t))\, dt$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 2\cdot 1}=0\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) \mid \left\{t^2\,.\, h_1(t)\right\}_0^{\eta}-\int_0^{\eta} t^2\frac{h_1(t)}{t}\, dt$$

$$=0\left(\eta^2\,.\,\frac{1}{(1-x)^2}\right)\int_0^{\eta}\frac{h_1(t)}{t}\, dt$$

$$=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right) \tag{5.12}$$

आगे भी

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 2\cdot 2}=\int_{\eta}^{\pi} t\, h(t)\,.\,0\left(\frac{1}{t}\right)0\left(\frac{1}{t}\right) dt, \text{ (3.4) से}$$

$$=0\,(1)\int_{\eta}^{\pi}\frac{h(t)}{t}\, dt$$

$$=0\,(1)\int_{\eta}^{\pi}\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\,(t\, h_1(t))\, dt$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 2\cdot 2}=0\,(1)\left[\left\{\frac{1}{t}\, t\, h(t)\right\}_{\eta}^{\pi}+\int_{\eta}^{\pi}\frac{1}{t^2}\, t\, h(t)\, dt\right]$$

$$=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right) \tag{5.13}$$

अतः (5.12) तथा (5.13) से

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 2}=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right) \tag{5.14}$$

अन्त में

$$\bar{\sigma}_{k\cdot 3}=\int_0^{\pi} t\, h(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cos kt}{k}\, x^k\, dt$$

$$=\left(\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\right) t\,h(t)\frac{1-x^2}{1-2x\cos t+x^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\eta} th(t)\,.\,0\left(\frac{1}{1-x}\right)dt+\int_{\eta}^{\pi} th(t)\,.\,0\left(\frac{1-x}{t^2}\right)dt$$

(3.5) तथा (3.6) से

$$=0\left(\frac{1}{1-x}\right)\int_0^{\eta} t\frac{d}{dt}(th_1(t))\,dt+0(1-x)\int_{\eta}^{\pi}\frac{1}{t}\frac{d}{dt}(th_1(t))\,dt$$

खण्डश: समाकलित करने पर

$$\bar{\sigma}_{k\cdot3}=0\left(\frac{1}{1-x}\right)\left[\left\{t^2 h(t)\right\}_0^{\eta}-\int_0^{\eta} t^2\frac{h_1(t)}{t}\,dt\right]$$

$$+0(1-x)\left[\left\{\frac{1}{t}t\,h_1(t)\right\}_{\eta}^{\pi}+\int_{\eta}^{\pi}\frac{1}{t^2}\,t\,h_1(t)\,dt\right]$$

$$=0\,(1-x)\,.\,0\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right). \qquad (5.15)$$

अत: (5.2), (5.3), (5.4), (5.6), (5.10), (5.14) तथा (5.15) से

$$\bar{\sigma}k=\frac{D}{\pi}\log\left(\frac{1}{1-x}\right)+0\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

अब $$\bar{\sigma}_{2k}=\bar{\sigma}k=\frac{D}{\pi}[\log(1-x^2)-\log(1-x]+0[\log(1-x^2)-\log(1-x)]$$

$$=\frac{D}{\pi}\log(1+x)+0(\log(1+x))$$

$$=\frac{D}{\pi}\log 2 \text{ ज्यों ज्यों } x\to1$$

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

निर्देश

1. बोर्वीन, डी०, जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1958, **33**, 212-220
2. हार्डी, जी०एच०, Divergent Series. पृष्ठ 81

3. सियांग, एफ०सी०, **बुलें० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **67**, 150-53

4. इशिगुरो, के०, **प्रोसी० जापान एके०**, 1962, **38**, 703-705

5. वही, **वही**, 1963, **39**, 156-159

6. मिश्रा, एम०एल०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ०**, 1967, **18**, 147-156

7. मोहन्टी, आर० तथा नन्दा, एम०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1956, **7**, 397-400

8. वही, **क्वार्ट० जर्न० मैथ०**, 1962, **13**, 40-44

9. नन्दा, एम०, **वही**, 1962, **13**, 227-234

10. नन्दा, एम० तथा दास, जी०, **इंडियन जर्न० मैथ०**, 1970, **12**, 124-135

11. शर्मा, पी०एल० तथा राव, वी०वी०जी०, *Hung. Ching Chow* 65th *Anniversary Vol. Taipei Taiwan, China* 1967, 18-20.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 217-221

जिंक II तथा कुछ प्रतिस्थापित सैलिसिलिक अम्ल के संकुलों के संभवन स्थिरांक तथा उष्मागतिकी प्राचलों का निर्धारण

के०जे० माण्डलिक, सी०पी० सक्सेना तथा पी०वी० खाड़ीकर

रसायन विभाग, शासकीय महाविद्यालय, झाबुआ,
रसायन विभाग इन्दौर विश्वविद्यालय, विज्ञान भवन, इन्दौर

[प्राप्त—दिसम्बर 12, 1981]

सारांश

जिंक (II) के 5-क्लोरो, 5-ऐमीनो तथा 5-सल्फो सैलिसिलिक अम्लों के संकुलों के निर्माण सम्बन्धी तथ्यों पर चालकतामितीय तथा पी-एच० मितीय विधियों द्वारा प्रकाश डाला गया है। जेरम विधि द्वारा संकुलों के निर्माण-स्थिरांक ज्ञात किये गये हैं, उष्मागतिकी प्राचल आकलित किये गये हैं एवं अवरक्त स्पेक्ट्रममितीय के आधार पर संकुलों में विभिन्न बन्धों का विवेचन किया गया है।

Abstract

Determination of formation constants and thermodynamic parameters of Zn (II) complexes with substituted salicylic acids. *By* K. J. Mandlik, C. P. Saxena and P.V. Khadikar, Department of Chemistry, Government College, Jhabua.

The complex formation of Zn (II) with 5-chloro, 5-amino and 5-sulphosalicylic acids have been studied conductometrically and pH-metrically. Formation constants of the complexes have been determined employing Bjerrum's method and various thermodynamic parameters are obtained. The bonding in the complexes is discussed on the basis of i r study.

खाड़ीकर तथा सहयोगियों[1,2] ने सैलिसिलिक अम्ल तथा प्रतिस्थापित सैलिसिलिक अम्लों के संकुलन का विस्तृत अध्ययन किया है। प्रस्तुत शोध पत्र में जिंक (II) के संकुलों का वर्णन किया गया है। संकुलों के निर्माण स्थिरांक जैरम विधि[3] से ज्ञात किये गये हैं। चालकतामितीय तथा धातु-निर्धारण द्वारा

उचित तत्वानुपातिकी (stoichiometry) ज्ञात की गई है। संभवन स्थिरांक का निर्धारण 30°, 35° तथा 40°±0.1° पर किया गया। $\triangle F$, $\triangle H$ तथा $\triangle S$ सदृश उष्मागतिकी प्राचल वर्णित किये गये हैं। संकुलों के आणविक बन्धों का वर्णन अवरक्त स्पेक्ट्रममिति के आधार पर किया गया है।

प्रयोगात्मक

पी०एच० मापी जिसकी याथार्थता 0.01 इकाई है (सिस्ट्रोनिक टाइप 322) प्रयुक्त किया गया। उपयोग में आने वाले समस्त रसायन ऐनालार मानक के थे। इस प्रयोग में फिलिप्स चालकता सेतु प्रयुक्त किया गया। समस्त प्रायोगिक कार्य हेतु उष्मास्थैतिक पात्र कुण्डिका जिसका ताप 30°, 35° तथा 40° से० ±0.1° से० प्रयुक्त किया गया था। $NaClO_4$ की आयनिक शक्ति 0.1M स्थिर रखी गई थी। 'पर्किन एलमर' का अवरक्त स्पेक्ट्रम प्रकाशमापी मॉडल 237 (4000-650 cm^{-1}) KBr चक्रिका तकनीक वाले उपकरण से विभिन्न संकुलों तथा लिगैन्डों के स्पेक्ट्रम अंकित किये।

विवेचना

एकपरिवर्तन विधि[4] से स्पष्टतः धातु आयनों तथा लिगैण्ड के बीच 1 : 1 तथा 1 : 3 संकुलों का निर्माण दर्शाते हैं। इस विवरण में धातु जिंक (II) तथा विभिन्न लिगैण्ड 5-क्लोरो, 5-ऐमीनो तथा 5-सल्फो सैलिसिलिक अम्ल हैं। पी०एच०-मितीय भिन्न अनुपात वाले मिश्रण (M : L) 1 : 1, 1 : 2 तथा 1 : 3 के अनुमापनों में 2, 4 तथा 5 क्षार के तुल्य नति परिवर्ती रेखा प्राप्त हुई, जिससे स्पष्ट हुआ कि संकुलन विधि में लिगैण्ड के प्रत्येक अणु से दो प्रोटान प्रतिस्थापित हुये हैं। यह तभी संभव है जब कि संकुलन में फिनालिक हाइड्रोजन भी प्रतिस्थापित हुआ है। 1 : 1 तथा 1 : 2 अनुपातीय अनुमापन में क्षार के 2 तथा 4 तुल्यमान पर स्पष्ट नति परिवर्तन 1 : 1 तथा संकुलों के निर्माण दर्शाता है।

एक रुचिकर तथ्य ज्ञात हुआ। 5-ऐमीनो सैलिसिलिक अम्ल में जब पी०एच० मान 4 से कम रखा जाता है तो 1 : 1 अनुमापन आरेख लिगैण्ड के अनुमापन आरेख से ऊपर स्थित रहता है। ऐसा संभवतः लिगैण्ड के प्रोटोनीकरण के कारण होता है, यह क्रिया-कलाप ऐमीनो-सैलिसिलिक अम्लों में सम्भव है। पी०एच०-मितीय अनुमापन आरेखों में 1 : 1 तथा 1 : 2 पर स्पष्ट नति परिवर्तन से घोल में बहुल केन्द्रीय वर्गों की उपस्थिति की सम्भावना समाप्त हो जाती है।

जेरम विधि से भिन्न-भिन्न पी०एच० मानों के लिए $\bar{n}$ तथा P[L] के मान ज्ञात किये गये। विभिन्न सम्भवन स्थिरांक आलेखित किये गये हैं। विश्लेषण से $\log K_1$, $\log K_2$ और $\log \beta_2$ के मान ज्ञात किये तथा सारणी 1 में अंकित किये गये हैं। इस सारणी से ज्ञात होता है कि $\log K_1$ का मान क्रमानुसार $5-NH_2$ SA>5−Cl SA>5−SSA तथा $\log K_2$ का मान 5−Cl SA>$5-NH_2$SA>5 SSA। $\log K_1$ तथा $\log K_2$ में अधिक अन्तर लिगैण्ड के द्वितीय अणु के बन्धन में त्रिविमविन्यासी बाधा (Steric hindrance) के कारण पाया जाता है। $\log K_a$ (लिगैण्ड का वियोजन स्थिरांक) तथा $\log K$ (संकुल का स्थायित्व स्थिरांक) के मध्य उपस्थित सम्बन्ध को ज्ञात किया गया है। जिंक (II) संकुल में $\log K_1 / \log K_a$ के मध्य आलेखन के द्वारा सरल रेखायें प्राप्त हुईं जिनसे विदित होता है कि जिंक (II)

संकुलों का स्थायित्व लिगैण्ड की क्षारीयता मान के अनुक्रम में हैं। विभिन्न जिंक (II) संकुलों के निर्माण की मुक्त ऊर्जा मान $-\triangle F$ की गणना निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की गयी है।

$$-\triangle F=2.033\ RT \log K.$$

विभिन्न $\triangle F$ के मानों को सारणी 2 में अंकित किया गया है। प्रस्तुत शोध कार्य में $\triangle H$ का मान तापगुणांक विधि[5] से ज्ञात किये गये हैं। प्रयुक्त सूत्र निम्नानुसार है :

$$\triangle H=2.303\ RT_1\ T_2\ (\log K''-\log K')/(T_2-T_1)$$

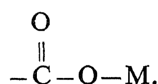
जहाँ K'' तथा K' ताप T_2 और T_1 पर संभवन स्थिरांक मान हैं।

स्थायी संकुल यौगिक के लिए $\triangle H$ का ऋणात्मक मान होना आवश्यक है। सारणी 2 से ज्ञात होता है कि $\triangle H$ का मान -10.921 से -43.683 (K. cal/mole) के मध्य है, $\triangle H$ के बड़े अन्तर से प्रगट होता है कि पूर्ण उष्मा (एन्थाल्पी) का मुक्त ऊर्जा परिवर्तन पर होता है तथा इस प्रकार धात्विक संकुलों के सापेक्ष स्थायित्व को भी प्रभावित करती है। $\triangle F$, $\triangle H$ और $\triangle S$ का सम्बन्ध निम्नानुसार है :

$$\triangle F=\triangle H-T\triangle S$$

इन्हीं संकुलों के एन्ट्रापी परिवर्तन के परिकलित मान ऋणात्मक अथवा किंचित धनात्मक पाये गये हैं। संकुल निर्माण में मुक्त कणों की संख्या में कमी पायी जाती है, जिसके फलस्वरूप स्वतन्त्र नति में कमी आ जाती है। ऐसे परिवर्तन में एन्ट्रापी का ऋणात्मक मान अपेक्षित है। धात्विक परिमापन के द्वारा जिंक (II) संकुलों की रचना $Na_2\ ZnL_2-2H_2O$ पायी गयी है।

सारणी 3 में जिंक (II) संकुलों के अवरक्त वर्णक्रम के प्रमुख बैन्ड दिये गये हैं। प्रस्तुत अध्ययन के सभी जिंक (II) संकुलों में कार्बोआक्सैलेट समूह (1700 cm^{-1} लिगैण्ड से लगभग 1600 cm^{-1} संकुल में) $>C=0$ स्ट्रेचिंग आवृत्ति में प्रभावी अन्तर पाया गया है।[6] इन प्रेक्षणों से संकुलों में उपस्थित धातु-आक्सीजन बन्ध का प्रमाण मिलता है। यदि संकुल की रचना



होती तो प्राप्त कार्बोआक्सैलेट आवृत्ति 1600 cm^{-1} के स्थान पर $>C=0$ आवृत्ति 1720 cm^{-1} प्राप्त होनी चाहिये थी। 1720 cm^{-1} के समीप बन्ध की अनुपस्थिति प्रदर्शित करती है कि कार्बोआक्सैलेट धातु बन्ध आयनिक हैं।[7]

बन्ध यदि 500 cm^{-1} से नीचे दिखाई देता तो जालक जल की पुष्टि हो सकती थी, प्रयुक्त उपकरण के परिसर के कारण हम जालक जल के बारे में पुष्टि नहीं कर सके हैं।

800 cm^{-1} पर बन्ध की अनुपस्थिति, जो कि सभी संकुलों में पाई गई है, प्रगट करती है कि इनमें जालक जल के साथ ही इनमे उपसहसंयोजक जल नहीं है।

सारणी 1

जिक (II) संकुलों के संभवन स्थिरांक

क्रमांक	संकुल	ताप	log K_1	log K_2	log β_2	log K_1/K_2	जिंक का प्रतिशत प्राप्त	परिकलित
1.	5-क्लोरोसैलिसिलेट	30	8.70	6.70	15.40	2.00	12.98	13.38
		35	7.90	6.10	14.00	1.80	—	—
		40	7.70	5.90	13.60	1.80	—	—
2.	5-ऐमीनोसैलिसिलेट	30	8.85	6.35	15.20	2.50	14.43	14.55
		35	8.80	5.90	14.70	2.90	—	—
		40	8.60	5.00	13.60	3.60	—	—
3.	5-सल्फोसैलिसिलेट	30	7.95	6.25	14.20	1.70	10.30	10.49
		35	7.70	5.85	13.55	1.85	—	—
		40	7.20	5.60	12.80	1.60	—	—

सारणी 2

जिंक (II) संकुलों के उष्मागतिकी प्राचल

क्रमांक	संकुल	$-\triangle F_1$ (K. cal/mole) 30°C	35°C	40°C	$-\triangle F_2$ (K. cal/mole) 30°C
1.	5-क्लोरोसैलिसिलेट	12.1419	11.2071	11.1009	9.3506
2.	5-ऐमीनोसैलिसिलेट	12.3512	12.4841	12.3984	8.8622
3.	5-सल्फोसैलिसिलेट	11.0952	10.9236	10.3801	8.7226

		35°C	40°C	$-\triangle H$ (K cal/mole)	$\triangle S$
1.	5-क्लोरोसैलिसिलेट	8.654	8.506	43.683	−104.09
2.	5-अमिनोसैलिसिलेट	8.369	7.208	10.921	− 4.72
3.	5-सल्फोसैलिसिलेट	8.299	8.073	32.762	− 71.50

सारणी 3

जिंक II संकुलों का अवरक्त स्पेक्ट्रा अध्ययन

क्रमांक	संकुल	एन्टीसिमेट्री COO^{-1} frq. cm^{-1}	बेन्डिग वाईब्रेशंस cm^{-1}	स्ट्रेचिंग वाईब्रेशंस cm^{-1}	
1.	5 क्लोरोसैलिसिलेट	1570	1570	3500, 3200 (S)	25
2.	5 ऐमिनोसैलिसिलेट	1600	1600	3650 (Sb)	55
3.	5 सल्फोसैलिसिलेट	1630	1570	3680 (Sb)	50

निर्देश

1. खाड़ीकर, पी०वी० तथा सक्सेना, सी०पी०, **जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1981, **43**, 603
2. खाड़ीकर, पी०वी, अमेरिया, आर०एल०, केकरे, एम०जी० तथा चौहान, एस०डी०, **जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1973, **35**, 4301
3. जेरम, जे०, मेटल अमीन फार्मेशन इन एक्वस साल्यूशन्स, वी० हन्स एन्ड सन्स कोपेनहेगन, 1941
4. नायर, एम०आर० तथा पान्डे, सी०एस०, **प्रोसी० इन्डि० एके० साइं०**, 1948, **27** ए, 284
5. मुरमन, एच० तथा बसेलो, एफ०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1952, **74**, 5243
6, बेलमी, एल०जे० तथा ब्राच, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1964, 4492
7. नाकामोटो, के० "इन्फ्रारेड स्पेक्ट्रा आफ इनआरगैनिक एन्ड को-आर्डिनेटेड कम्पाउन्ड्स" जान विले 1963
8. फुजिटा, जे०, नाकामोटो, के० तथा कोबायाशी, एम०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1956, **78**, 3963

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 223-226

समाकल परिवर्तों का अध्ययन-II

के० सी० गुप्ता

गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 24, 1981]

सारांश

हाल ही में लेखक ने समाकल परिवर्तों के एक वर्ग के लिये चार प्रमेय प्राप्त किया है जिनमें से एक प्रमेय के सम्प्रयोग से एक नवीन प्रमेय प्राप्त की गई है जो दो सार्वीकृत लैप्लास परिवर्तों से सम्बद्ध फलनों के प्रतिबिम्बों में पारस्परिक सम्बन्ध स्थापित करती है।

Abstract

On a study of integral transforms-II. *By* K. C. Gupta, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

The present note is in sequel to a recent paper by the author. Therein four theorems involving a class of integral transforms (whose kernels are arbitrary functions) were established. Here, by the application of one of these theorems we obtain a new theorem which interconnects images of related functions in two generalized Laplace transforms. Applications of remaining theorems of the earlier paper can be made by following a similar procedure. The theorem obtained here is new and of interest in itself. It generalizes several useful theorems concerning other well known integral transforms.

1. गुप्ता तथा मित्तल[1] ने निम्नलिखित समाकल परिवर्त का सूत्रपात किया

$$\phi(p)=\int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[px \;\middle|\; \begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] f(x)\,px \tag{1.1}$$

(1.1) द्वारा परिभाषित परिवर्त को H-फलन परिवर्तन के रूप में अभिहित किया जावेगा। परिवर्त के अष्टि के रूप में H-फलन का सूत्रपात फाक्स[2] ने किया था। गुप्ता तथा जैन[3] के शोधपत्र में इसकी पूर्ण परिभाषा, इसके कुछ गुण तथा विशिष्ट दशाएँ देखी जा सकती हैं।

यही नहीं, माइजर[6] ने निम्नलिखित समाकल परिवर्त का सूत्रपात किया

$$\phi(p)=K\{f(x), v;\ p\}=\int_0^\infty (px)^{1/2} K_v(px) f(x)\, dx. \tag{1.2}$$

ऊपर दिये गये दोनों ही परिवर्त विख्यात लैप्लास परिवर्त के ही सार्वीकरण हैं।

हाल ही में लेखक[4] ने निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त की है

यदि $$h_1(p)=T_1\{x^{\delta/\sigma-1} f(x);\ p\}=\int_0^\infty k_1(px)\, x^{\delta/\sigma-1} f(x)\, dx \tag{1.3}$$

तथा $$h_2(p)=T_2\{f(x^{-\sigma});\ p\}=\int_0^\infty k_2(px)\, f(x^{-\sigma})\, dx, \tag{1.4}$$

तो $$h_1(p)=\sigma\int_0^\infty h_2(x)\, \phi(x, p)\, dx, \tag{1.5}$$

जहाँ $$p^{-\delta-1} k_1(ap^{-\sigma})=T_2\{\phi(x, a);\ p\}, \tag{1.6}$$

अशून्य वास्तविक संख्या a स्वतन्त्र है p से और (1.3) से लेकर (1.6) तक समीकरणों में निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हैं।

उपर्युक्त प्रमेय में हम

$$k_1(px)=H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[px \,\middle|\, \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \tag{1.7}$$

$$k_2(px)=(px)^{1/2} K v\,(px),$$

लेंगे। ज्ञात परिणामों[3] की सहायता से थोड़े ही सरलीकरण के फलस्वरूप

$$p^{-\delta-1} k_1(ap^{-\sigma})=p^{-\delta-1} H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[ap^{-\sigma} \,\middle|\, \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right]$$

$$=K\left\{2^{1/2-\delta} x^{\delta}\ H_{p,\ q+2}^{m,\ n}\left[a\left(\frac{x}{2}\right)^{\sigma} \,\middle|\, \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right] v;\ p\right\} \tag{1.9}$$

जहाँ $\mathrm{Re}(p)>0,\ \sigma>0,$

$$-\sigma \min_{1\leqq j\leqq m}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)\right] < \min\left[\mathrm{Re}\left(\delta\pm v+\frac{3}{2}\right),\right.$$

A से $(a_j, \alpha_j)_{1,p}$ तथा B से $(b_j, \beta_j)_{1,q}$, $\left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}\pm\frac{v}{2},\ \frac{\sigma}{2}\right)$ का सूचन किया गया है।

(1.6) के साथ ही (1.9) की विवेचना करने पर

$$\phi(x, \alpha)=2^{1/2-\delta}\, x^{\delta}\, H_{p,\, q+2}^{m,\, n}\left[\alpha\left(\frac{x}{2}\right)^{\sigma}\ \middle|\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right] \tag{1.10}$$

अब (1.10) से $\phi(x, p)$ के मान को (1.5) में रखने पर हमें निम्नांकित रोचक प्रमेय प्राप्त होती है।

प्रमेय 1

यदि $$h_1(p)=H\{x^{\delta/\sigma-1} f(x);\, p\} \tag{1.11}$$

तथा $$h_2(p)=K\{f(x^{-\sigma});\, \nu;\, p\} \tag{1.12}$$

तो $$h_1(p)=\sigma 2^{1/2-\delta}\int_0^{\infty} x^{\delta} h_2(x)$$

$$\times H_{p,\, q+2}^{m,\, n}\left[p\left(\frac{x}{2}\right)^{\delta}\ \middle|\ \begin{matrix} (a_j,\, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j,\, \beta_j)_{1,q} \end{matrix},\ \left(\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}\pm\frac{\nu}{2},\ \frac{\sigma}{2}\right)\right] dx \tag{1.13}$$

जहाँ संकेत H, K क्रमशः (1.1) तथा (1.2) द्वारा परिभाषित H-फलन परिवर्त तथा माइजर परिवर्त के लिए आये हैं। उपर्युक्त परिणाम तभी लागू होगा जब $\mathrm{Re}(p)>0$, $\sigma>0$

$$-\sigma \min_{1\leqq j\leqslant m}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)\right]<\min\left[\mathrm{Re}\ \delta\pm\nu+\frac{3}{2}\right]$$

तथा (1.11), (1.12) तथा 1.13) में सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

2. विशिष्ट दशाएँ

H-फलन की सार्विक प्रकृति के कारण ऊपर दी गई प्रमेय से अनेक समाकल परिवर्तों को परस्पर सम्बद्ध करने वाले परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। (1.11) में निहित H-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण से एक ज्ञात फल[5] की सहायता से हमें मैनरा परिवर्त [5] तथा माइजर परिवर्त[6] वाली निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होती हैं।

प्रमेय 2

यदि $$h_1(p)=W\{x^{\delta/\sigma-1} f(x);\, s,\, k,\, r;\, p\}$$

$$=\int_0^{\infty} x^{\delta/\sigma-1}\, e^{-px/2}\,(px)^{-s-1/2}\, W_{k+1/2,\, r}(px)\, f(x)\, dx \tag{2.1}$$

तथा $$h_2(p)=K\{f(x^{-\sigma});\, \nu;\, p\} \tag{2.2}$$

तो
$$h_1(p)=\sigma 2^{1/2-\delta}\int_0^\infty x^\delta\, h_2(x)\; H_{1,\,4}^{2,\,0}\left[p\left(\frac{x}{2}\right)^\sigma \middle| \begin{matrix}(-k-s,\ 1)\\ (\pm r-s,\ 1),\ (1/4-\delta/2\pm\nu/2,\ \sigma/2)\end{matrix}\right] dx \quad (2.3)$$

जहाँ (2.1), (2.2) तथा (2.3) में आये समाकल परम अभिसारी हैं

$$\text{Re}\ (p)>0,\ \sigma>0,\ \min\ \text{Re}[\delta+3/2\pm\nu+\sigma(\pm r-s)]>0$$

तथा संकेत k (1.2) द्वारा परिभाषित माइजर परिवर्त के लिये आया है।

यदि उपर्युक्त प्रमेय में हम (2.1) तथा (2.2) में आये परिवर्तों को लैप्लास परिवर्त में समानीत करें तो हमें गुप्ता[7] द्वारा स्थापित प्रमेय प्राप्त होती है। प्रमेय 1 से भिसे परिवर्त[8], वर्मा परिवर्त[9] तथा समय-समय पर प्रवर्तित अन्य कई परिवर्तत प्राप्त किये जा सकते हैं किन्तु उनका उल्लेख यहाँ नहीं किया जावेगा।

निर्देश

1. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, **जर्न० आस्ट्रे० मैथ० सोसा०**, 1970, **11**, 143-53.

2. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.

3. गुप्ता, के० सी०, तथा जैन, यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1966, **36**A, 594-609.

4. गुप्ता, के० सी०, **इंडियन जर्न० प्योर० एप्लाइड मैथ०**, 1980, **11**(6), 720-726.

5. मैनरा, वी० पी०, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1961, **53**, 23-31.

6. माइजर, सी० एस०, Nederl. Akad. WetcnscO. Proc. Ser., 1940, A**43**, 599-608.

7. गुप्ता, एच० सी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1948, 3A, 131-156.

8. भिसे, वी० एम०, **विक्रम क्वार्ट० रिसर्च जर्न०**, विक्रम यूनिवर्सिटी, 1959, **3**, 57-63.

9. वर्मा, आर० एस०, **करेंट साइंस**, 1947, **16**, 17-18.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982 Pages, 227-233

मूँग तथा लोबिया के अंकुरण तथा अंकुरों की प्रारम्भिक वृद्धि पर सर्वांगी जीवनाशियों का प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा ए० के० गुप्ता

कृषि रसायन अनुभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 19, 1981]

सारांश

फोरेट, डाइसल्फोटान, मोनोक्रोटोफास तथा फेनसल्फोथिऑन—इन चार सर्वांगी जीवनाशियों की 25, 50 तथा 100 अंश / लक्षांश मात्रायें डालकर मूँग तथा लोबिया के अंकुरण तथा अंकुरों की प्रारम्भिक वृद्धि पर इनके प्रभावों का अध्ययन किया गया। मूँग तथा लोबिया के बीजों के द्वारा इन जीवनाशियों की उद्ग्रहीत मात्रायें ज्ञात की गईं और सिक्त करने के 0, 2, 4 तथा 6 दिन बाद बीजों से निकले मूल तथा बीजांकुर की वृद्धि के साथ इनका सम्बन्ध स्थापित किया गया। यह पाया गया कि फोरेट तथा फेनसल्फोथिऑन के उद्ग्रहण के फलस्वरूप अंकुरण तथा मूल वृद्धि में ह्रास हुआ जबकि डाइसल्फोटान तथा मोनोक्रोटोफास से अंकुरण तथा अंकुरों की प्रारम्भिक वृद्धि को प्रोत्साहन मिला जो सम्भवतः प्रयुक्त जीवनाशियों के विघटन से प्राप्त फास्फोरस के कारण है।

Abstract

Effect of systemic pesticides on germination and initial growth of seedlings of mung and cowpea. *By* S. G. Misra and A. K. Gupta, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Four systemic organophosphorus pestecides viz. phorate, disulfoton, monocrotophos and fensulfothion were used @ 25, 50 and 100 ppm in order to find their effect on the germination and initial growth of seedlings of **mung** and **cowpea** upto 6 days. The uptake of these organophosphorus pestecides by the seeds was determined and its retation to radicle and plumule growth after 2, 4 and 6 days of soaking has been found out. Phorate and fensulfothion decreased the percentage germination and radicle growth in mung and cowpea alike whereas monocrotophos and disulfoton

favoured a better germination and initial seedling growth possibly due to phosphorus released through degradation of pesticides.

बोते समय सामान्यतः सर्वांगी कीटनाशियों का व्यवहार खाद देने के लिए किया जाता है। वे जल के साथ बीजों के भीतर प्रविष्ट हो जाते हैं और सम्पूर्ण तन्त्र को विषाक्त बना कर अंकुरण की प्रारम्भिक अवस्था में बीज तथा बीजांकुर की रक्षा करते हैं। जल के प्रवेश के बाद ही बीज के भीतर अभिक्रियाएँ प्रारम्भ होती हैं और अन्ततः मूलांकुर (radicle) और फिर प्रांकुर (plumule) निकलते हैं। सर्वांगी कीटनाशी बीजों में प्रवेश करने के बाद उपापचयी अभिक्रियाओं में व्यवधान डालते हैं। इस व्यवधान का वास्तविक स्वरूप क्या होगा, इस सम्बन्ध में अधिक अध्ययन नहीं हुआ। प्रस्तुत शोधकार्य का उद्देश्य बीजांकुरण की प्रारम्भिक अवस्था में कीटनाशियों के सम्भावित व्यवधानों को स्पष्ट करना है।

प्रयोगात्मक

बीजांकुरण के लिए दो दलहनी बीज चुने गये। ये हैं—मूंग तथा लोबिया। इन दोनों के 25-25 स्वस्थ बीजों को पेट्रीडिशों में भरी हुई 50 ग्राम बालू में बो दिया गया। इनमें 25 मिली० कीटनाशियों का विलयन डाला गया। जिन चार सर्वांगी कीटनाशियों का प्रभाव देखा गया, वे हैं फोरेट, डाइसल्फोटान, मोनोक्रोटोफास तथा फेनसल्फोथियान। ये चारों आर्गैनोफास्फोरस कीटनाशी हैं। इनकी 25, 50 100 अंश प्रतिदश लक्षांश मात्रायें बालू में मिलाई गईं। बीजों के अंकुरण का अवलोकन 2, 4, तथा 6 दिनों बाद किया गया। इस अवलोकन में यह देखा गया कि कितने बीज उगे, और मूलांकुर तथा प्रांकुर की लम्बाई कितनी थी। इस लम्बाई की माप ग्राफ पेपर की सहायता से की गयी। प्राप्त परिणाम सारणी 2-4 में दिये गये हैं।

बीजों द्वारा ग्रहीत कीटनाशियों की मात्रा ज्ञात करने के लिए सामान्यतः 5-10 बीजों को लेकर तौला गया, उन्हें चूर्ण करके ऐसीटोन द्वारा निष्कर्षित किया गया। निष्कर्ष में कीटनाशियों की मात्रा गेट्जे और वाट्स की विधि[1] द्वारा ज्ञात की गई जिसमें जैन इत्यादि[2] ने परिवर्धन किये हैं, । प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 के आँकड़ों से विदित होता है कि दोनों प्रकार के बीजों द्वारा दूसरे दिन कीटनाशियों का सर्वाधिक अवशोषण होता है और इसके बाद ज्यों-ज्यों अंकुरण अग्रसर होता है, छठे दिन तक अवशोषित मात्रा लगातार घटती जाती है। किन्तु दोनों प्रकार के बीजों द्वारा विभिन्न कीटनाशियों की अवशोषित मात्रा पृथक-पृथक है। उदाहरणार्थ, मूंग के बीजों के द्वारा फोरेट की उच्चतम तथा मोनोक्रोटोफास की न्यूनतम मात्रा अवशोषित होती है। किन्तु लोबिया में फेनसल्फोथियान तथा मोनोक्रोटोफास का क्रमशः उच्चतम तथा न्यूनतम अवशोषण हुआ।

सारणी 1

मूँग के बीजों द्वारा कीटनाशियों का शोषण (ug/g)

अंकुरण की अवधि	नियन्त्रण	फारेट ppm			डाइसल्फोटान ppm			मोनोक्रोटोफास ppm			फेनसल्फोथियान ppm		
		25	50	100	25	50	100	25	50	100	25	50	100
						मूंग							
2 दिन	0	1.89	1.95	3.06	1.60	1.79	2.25	1.20	1.27	1.53	1.78	1.81	2.46
4 दिन	0	1.61	1.22	2.15	1.38	1.12	1.80	1.07	1.03	1.50	1.70	1.50	1.18
6 दिन	0	1.20	1.09	1.77	1.30	1.02	1.50	0.92	0.97	1.20	1.63	1.13	0.96
						लोबिया							
2 दिन	0	2.63	3.82	5.96	1.89	3.23	6.40	2.04	3.96	4.21	3.20	3.85	6.77
4 दिन	0	2.17	2.06	4.66	1.05	2.97	3.85	1.91	2.04	3.12	2.19	2.41	3.16
6 दिन	0	1.78	1.55	2.07	0.92	1.31	2.32	1.31	1.89	2.50	1.76	1.98	2.58

सारणी 2

बीजों का अंकुरण प्रतिशत (माध्य)

अंकुरण की अवधि	नियन्त्रण	फोरेट ppm			डाइसल्फोटान ppm			मोनोक्रोटोफास ppm			फेनसल्फोथियान ppm		
		25	50	100	25	50	100	25	50	100	25	50	100
						मूंग							
2 दिन	98	98	85	80	100	98	95	98	95	90	98	95	80
4 दिन	100	98	85	80	98	95	95	100	90	95	95	90	80
6 दिन	100	98	85	80	98	95	95	100	90	95	95	90	80
						लोबिया							
2 दिन	88	92	84	80	92	84	88	88	84	80	86	80	64
4 दिन	90	92	88	88	92	86	84	88	84	80	84	88	70
6 दिन	92	92	88	88	92	86	84	88	84	80	84	88	70

सारणी 3

अकुरण के समय मूलांकुर की वृद्धि (सेमी॰)

अंकुरण की अवधि	नियन्त्रण	फोरेट ppm			डाइसल्फोटान ppm			मोनोक्रोटोफास ppm			फेनसल्फोथियान ppm		
	0	25	50	100	25	50	100	25	50	100	25	50	100
मूंग													
2 दिन	0.4	0.6	0.4	0·3	0.8	0.7	0.5	0.5	0.8	0.5	0.8	0.7	0.4
4 दिन	3.2	6.4	4.5	3.0	5.0	5.2	4.5	4.8	5.8	4.3	6.0	5.2	2.2
6 दिन	3.5	6.5	4.8	3.5	5.2	5.0	4.6	4.8	4.6	4.8	6.2	5.4	5.0
लोबिया													
2 दिन	1.4	1.9	1.7	1.0	1.1	0.6	0.5	1.8	1.1	1.1	0.7	1.0	0.4
4 दिन	3.0	2.7	3.2	2.8	2.4	2.4	2.1	3.2	3.5	4.0	1.4	2.4	1.3
6 दिन	6.6	5.7	4.6	5.2	5.6	4.5	4.6	6.6	5.7	5.4	4.5	5.0	4.3

सारणी 4

अंकुरण के समय प्रांकुर की वृद्धि (सेमी०)

अंकुरण की अवधि	नियन्त्रण	फोरेट ppm			डाइसल्फोटान ppm			मोनोक्रोटोफास ppm			फेनसल्फोथियान ppm		
		25	50	100	25	50	100	25	50	100	25	50	100
मूंग													
2 दिन	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4 दिन	0.5	0.8	0.7	0.4	0.7	0.2	0.3	0.8	1.0	0.4	0.7	0.6	0.0
6 दिन	3.5	4.6	4.5	4.0	4.6	5.2	3.8	4.6	5.0	4.8	4.5	4.6	4.8
लोबिया													
2 दिन	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4 दिन	0.3	—	—	—	0.4	0.4	0.5	0.3	0.6	0.7	0.4	0.4	0.6
6 दिन	4.2	2.1	2.0	1.8	3.5	2.6	3.9	5.0	5.0	4.9	4.4	3.9	0.5

यह भी देखा गया कि (सारणी 2) कीटनाशियों की न्यूनतम मात्रा का दोनों प्रकार के बीजों के अंकुरण-प्रतिशत पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा किन्तु कीटनाशियों की उच्च मात्रा के प्रयोग से अंकुरण में अवरोध आया। चारों कीटनाशियों में से फोरेट तथा फेनसल्फोथिआन का अवरोधक प्रभाव सर्वाधिक रहा। इनकी अधिक मात्रा होने पर मूलांकुर की वृद्धि घटी। किन्तु इसके विपरीत मोनोक्रोटोफास तथा फेनसल्फोथिआन का लाभकारी प्रभाव पाया गया। इसी प्रकार प्रांकुर की वृद्धि पर फोरेट तथा फेनसल्फोथिआन की अधिक मात्रा का अवरोधक प्रभाव देखा गया (सारणी 3 तथा 4)।

अंकुरण प्रतिशत पर फोरेट तथा अन्य कीटनाशियों का अवरोधक प्रभाव अन्य कार्यकर्ताओं द्वारा भी देखा गया है[3-6]। दास तथा चन्द्रिका[7], दाल्वी इत्यादि[8] ने फोरेट तथा अन्य कीटनाशियों के द्वारा मूलांकुर तथा प्रांकुर की वृद्धि में ह्रास का अवलोकन किया है।

इस प्रकार यह स्पष्ट हो जाता है कि आर्गैनोफास्फोरस कीटनाशियों में से जिन दो के द्वारा अंकुरण तथा अंकुर की वृद्धि प्रभावित होती है वे अवश्य ही कोशिका विभाजन पर प्रतिकूल प्रभाव डालते होंगे [9, 10]। साथ ही जिन दो कीटनाशियों से अंकुरण को प्रोत्साहन मिलता है वे अवश्य ही अपने विघटन के फलस्वरूप उन्मुक्त फास्फेट के द्वारा वृद्धि में सहायक होते हैं।

आर्गैनोफास्फोरस कीटनाशियों के इस दुहरे प्रभाव का लाभ बीज बोते समय उठाया जा सकता है।

निर्देश

1. गेट्जे, एम० ई० तथा वाट्स, आर० आर० J. Ass. off. Agric. Chem, 1964, **47**, 1094-96.
2. जैन, एच० के०, पाण्डेय, एस० वाई०, अग्निहोत्री, एन० पी० तथा दीवान, आर० एस०, Indian J. Ent. 1974, **36(2)**, 145-148.
3. सतपथी, जे० एम०, Pesticides, 1968, **9**, 18.
4. जोतवानी, एम० जी०, Indian J. Ent., 1968, **30**(II), 134-36
5. लाल, ओ० पी० तथा सेनगुप्ता, के०, Indian J. Ent., 1975, **37(4)**, 413.
6. गुप्ता, डी० एस० तथा मिश्रा, आर० एस०, Indian J. Ent. 1970, **32(4)**, 396-97.
7. दास, एम० एम० तथा चन्द्रिका, एस०, Agric. Res. J., Kerala, 1972, **10**(2), 152-56.
8. दाल्वी, आर०आर०, सलुखे, डी० के० तथा सिंह, बी०, J. Agric. Fd. Chem. 1972, **20**(5), 1000.
9. स्वीनी, जे० पी० तथा मार्श, ए० सी०, **वही**, 1971, **19**, 854.
10. सिंह, बी० डी०, सिंह, वाई०, सिंह आर० वी०, सिंह आर० एम०, शर्मा, एम० डी० आर० के० तथा सिंह जे०, Indian J. Expt. Biol. 1977, **15**(8), 688-91.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982 Pages, 235-238

पाइरीन-प्रलेपित पॉलिस्टाइरीन फिल्मों में स्थायी ध्रुवण

एस० के० श्रीवास्तव तथा ए० आर० तिवारी
भौतिकी विभाग, सागर यूनिवर्सिटी, सागर

[प्राप्त—जनवरी 28, 1980]

सारांश

परावैंगनी-विकिरण द्वारा पाइरीन-प्रलेपित पॉलिस्टाइरीन फिल्मों में प्रकाश-विध्रुवण-धारा का मापन किया गया। 10^{-8}C cm^{-2} से अधिक के उच्च आवेश घनत्व का मुख्य कारण आवेश वाहकों का ट्रैप हो जाना है। 92 तथा 178°C पर प्रक्षेपित ताप सम्प्रेरित धाराओं (TSC) के शीर्षों की सक्रियण ऊर्जा क्रमशः 1.71 तथा 1.68 eV पाई गई।

Abstract

Persistent polarization in pyrene-doped polystryene film. *By* S. K. Shrivastava and A. R. Tiwari, Department of Physics, University of Sagar, Sagar (M. P.).

Photo-depolarization current has been measured in pyrene-doped PS films using UV-radiation, The high charge density in excess of 10^{-8} C cm^{-2} is mainly due to the trapping of charge carriers. The activation energies of the TSC peaks observed at 92 and 178°C are found to be 1.71 and 1.68 eV respectively.

परावैद्युत पदार्थ के ट्रैप होने वाले स्थलों पर आवेश संग्रहीत होता है। बहुलक पदार्थों में कई ट्रैप करने के स्थल होते हैं। ट्रैप क्रिस्टलीय तथा अक्रिस्टलीय क्षेत्रों अथवा उनके किनारों पर हो सकते हैं (स्टप तथा कार[10])। इलेक्ट्रॉन निकटवर्ती अणुओं में परमाणुओं के समूहों के अन्दर बन्द हो सकते हैं (पर्लमैन[6])। ट्रैप स्वयं आण्विक श्रृंखलाओं पर भी हो सकते हैं (फिशर तथा रोहल[2])। दृढ़ काँचों (बहुलकों) की आवेश संग्रहण क्षमता उपयुक्त अपद्रव्यों के प्रलेपन द्वारा काफी बढ़ाई जा सकती है (महेन्द्र तथा सहयोगी[5], श्रीवास्तव तथा सहयोगी[9]) जिसके द्वारा पदार्थ की वैद्युतचालकता बढ़ जाती है जिसका कारण संकर बनने से उत्पन्न संरचनात्मक परिवर्तन बताया गया है (डेवीस[1], लीविस तथा टेलर[4])।

प्रस्तुत कार्य में आवेश के संग्रह तथा क्षय के लिए उत्तरदायी प्रक्रमों को समझने के लिए पाइरीन प्रलेपित पालिस्टाइरीन फिल्मों में प्रकाश-विध्रुवण तथा ताप सम्प्रेरित धाराओं की माप की गई है। यह बहुलकों के प्रकाश सुग्राहीकरण में सहायता कर सकता है।

प्रयोगात्मक

औद्योगिक श्रेणी की पॉलिस्टाइरीन (केम्प्योर बम्बई से प्राप्त) अध्ययन में प्रयुक्त की गई। पाइरीन का 4.9×10^{-3} gl^{-1} सान्द्रण प्राप्त करने के लिए इसे साइक्लोहेक्सानोन में घोला गया और विलोडित करते हुए बूँद-बूँद करके पॉलिस्टाइरीन विलयन में मिलाया गया। स्वच्छ Al- सब्सट्रेटों (आधारों) पर विलयन से लगभग 2 μm मोटाई की फिल्में बनाई गईं और इन्हें 48 घन्टों तक वायुमण्डलीय वातावरण में सुखाया गया।

अन्ध कक्ष में पराबैंगनी-विकिरण करने के लिए फिल्म को तार पाश में प्रेस किया गया। ऊपरी इलेक्ट्रोड (1 cm^{-2} क्षेत्र वाला) को समान दाब बनाये रखने के लिए एक रोधी माइक्रोमीटर पेंच के तल में जोड़ा गया। विकिरण की उपस्थिति में नमूने को 11 kV cm^{-1} के साथ बाइसिंग (अभिनत) द्वारा 10 मिनट में प्रकाश-इलेक्ट्रेट बनाया गया। फील्ड तथा समय की ये अनुकूलतम स्थितियाँ पाई गईं। अवांच्छित आवेशों को निकालने के लिए इलेक्ट्रेट को 30 सेकण्ड तक अँधेरे में रखा गया और उसी विकिरण द्वारा विध्रुवित किया गया। नमूने से प्राप्त निर्गम (output) को एक काइथले 600 B इलेक्ट्रोमीटर में निवेशित किया गया।

ताप सम्प्रेरित धाराओं को मापने के लिए इसी प्रकार के लेडॉन-इलेक्ट्रोड समुदाय को प्रयुक्त किया गया। ताप इलेक्ट्रेट 30 मिनट में 27 kV cm^{-1} के बाइसिंग (अभिनत) फील्ड के साथ 90° पर बना। दो मिनट तक इलेक्ट्रेट को लघुपथ किया गया और ताप सम्प्रेरित धारा को उसे 13·5° प्रति सेन्टीमीटर की सन्निकटतः रेखीय दर से गरम करके नोट किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

आपतित फोटॉन फिल्म की सतह तथा अधिकांश फिल्म में इलेक्ट्रॉन तथा छिद्र उत्पन्न करते हैं जो अनुप्रयुक्त वैद्युत फील्ड के प्रभाव में चलते-फिरते हैं और ट्रैप हो जाते हैं (पिल्लई तथा सहयोगी[7])। ये ट्रैप किए हुए छिद्र तथा इलेक्ट्रॉन नमूने के दोनों ओर धनात्मक तथा ऋणात्मक आवेश उत्पन्न करते हैं। इस प्रकार, नमूना ध्रुवित हो जाता है जो फील्ड हटा लेने पर भी बना रहता है।

नमूने को पुनः प्रदीप्त करने पर उत्पन्न धारा, फोटॉन द्वारा जनित वाहकों की गति के कारण तथा अन्ध ध्रुवण द्वारा उत्पन्न धारा के कारण होती है। पूर्वोक्त मुख्यतः पुनर्विकिरण पर, उनके ट्रैपों से निकाले गये वाहकों की संख्या पर निर्भर करता है। बाद वाले में, ध्रुवण के समय विस्थापित वाहकों की गति, इलेक्ट्रोड तथा फिल्म के घनिष्ट सम्पर्क द्वारा उत्पन्न अपखंडन आवेश, मुख्यतः उच्च फील्ड पर ध्रुवण के समय सतह पर इलेक्ट्रोड से फुहार से रूप में आवेश (sprayed charges) तथा नमूने के ताप पर निर्भर वाहकों की ताप गति सम्मिलित हैं। विध्रुवण के समय, अन्ध ध्रुवण द्वारा उत्पन्न अपखण्डन

आवेशों का पुनः संयोग तथा जालक श्रांति प्रक्रम द्वारा क्षय हो जाता है (पिल्लई तथा सहयोगी [7]) जो अत्यन्त धीमा होता है। चालन तथा संयोजकता पट्ट के निकट ट्रैप किए हुए इलेक्ट्रॉन तथा छिद्र, धारा प्रवाह में योगदान करने के लिए क्रमशः चालन तथा संयोजकता पट्ट तक आने के लिए यथेष्ठ ऊर्जा ग्रहण करते हैं। जैसे-जैसे समय बीतता है, धारा का शनैः शनैः क्षय होता जाता है जिसका अर्थ होता है कि मुक्त आवेश वाहक कम हो रहे हैं। इस समय, धारा का योगदान मुख्यतः उन वाहकों से आता है जो ऊर्जा अन्तराल के काफी अन्दर ट्रैप किए हुए हैं। चित्र 1 में प्रदर्शित प्ररूप का असंतत क्षय संकेत करता है कि पाइरीन- प्रलेपित पॉलिस्टाइरीन फिल्मों में एक से अधिक ट्रैप करने के तल होते हैं (पिल्लई तथा गोयल [8])। विध्रुवण के समय निर्मुक्त सम्पूर्ण आवेश 9×10^{-8} C पाया जाता है। इसकी गणना धारा के विपरीत समय को समाकलित करके की गई।

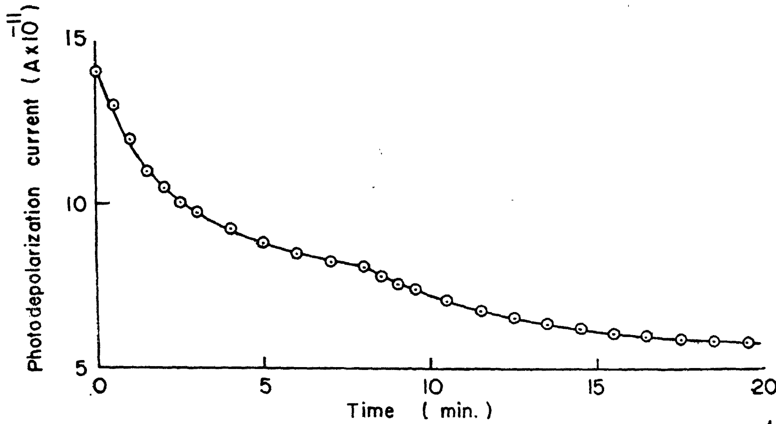


Fig. 1– Decay mode of the photo-electret formed by 1! kVcm^{-1} in 10 mins.

चित्र 1

चित्र 2 नमूने का ताप सम्प्रेरित धारा-तापरेखी प्रदर्शित करता है जैसा कि पहले सूचित किया जा चुका है (श्रीवास्तव तथा सहयोगी[9])। 1·71 तथा 1.68 eV सक्रियण ऊर्जावाले दो शीर्ष 92 तथा 178° पर देखे जाते हैं। सक्रियण ऊर्जा की गणना गार्लिक तथा गिब्सन[3] की प्रारम्भिक उत्थान विधि के द्वारा की गई। ताप सम्प्रेरित धारा के निम्न ताप पुच्छ पर इलेक्ट्रॉनीय ट्रैप करने वाले प्रक्रमों का आधिपत्य होता है। दूसरा शीर्ष जो पॉलिस्ट्राइरीन के काँच-संक्रमण ताप (100°C) के काफी ऊपर आता है उसका कारण वे ट्रैप होते हैं जो इलेक्ट्रेट की सतह के नीचे उपस्थित अन्तराकाशी आवेश बनाते हैं (श्रीवास्तव तथा सहयोगी[9])।

निष्कर्ष : पाइरीन-प्रलेपित पॉलिस्टाइरीन फिल्मों के पराबैंगनी विकिरण द्वारा प्रकाश-ध्रुवण 10^{-8} C cm^{-2} से अधिक आवेश घनत्व उत्पन्न कर सकते हैं। ताप-सम्प्रेरित धारा से सक्रियण ऊर्जाओं के निर्धारण में सहायता मिलती है।

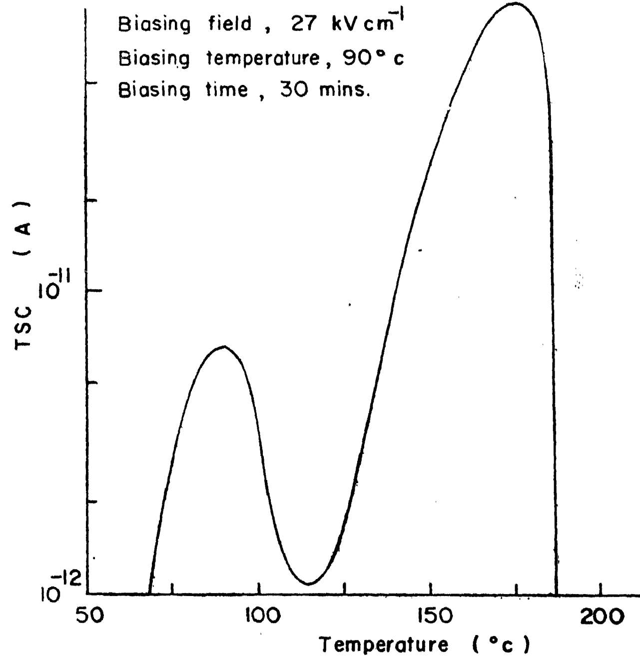


Fig. 2 – TSC thermogram

चित्र 2

निर्देश

1. डेवीस, डी० के०, J. Phys. D : Appl. Phys. 1972, 5, 162-8.
2. फिशर पी०, तथा रोहल, पी०, J. Polym. Sci. Polym. Phys. 1976, **14**, 531-42.
3. गार्लिक, सी० एफ० जे० तथा गिब्सन, ए० एफ०, Proc. Phys. Soc. 1948, **60**, 574-90.
4. लेविस, टी० जे० तथा टेलर, डी० एम०, J. Phys. D : Appl. Phys. 1976, 5, 1664.
5. महेन्द्र, पी० सी०, जैन, के तथा महेन्द्र, पी०, J. Phys. D : Appl. Phys. 1976, **9**, 83-8.
6. पर्लमैन, एम० एम०, J. Electrochem. Soc. 1972, **7**, 892-8.
7. पिल्लई, पी० के० सी०, बालकृष्णन, के० जी० तथा जैन, वी० के०, J. Appl. Phys. 1971, **42**, 525-30.
8. पिल्लई, पी० के० सी० तथा गोयल, एम०, Polymer 1974, **16**, 5-8.
9. श्रीवास्तव, एस० के०, रानाडे, जे० डी० तथा श्रीवास्तव, ए० पी०, Phys. Letts. 1979, A**69**, 466.
10. स्टप, एस० आई० तथा कार, एस० एच०, J. Polymer Sci. Polymer. Phys. 1977, **15**, 485.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 239-241

Cr (III) के लिए नवीन भारमापी अभिकर्मक के रूप में 8-हाइड्राक्सी-क्विनोलीन-5- (p-टॉलिल) सल्फोनैमाइड

जी० डी० तिवारी तथा एम० एन० मिश्र

रसायन विभाग, बी० एस० एस० डी० कालेज, नवाबगंज, कानपुर

[प्राप्त—फरवरी 6, 1980]

सारांश

क्रोमियम (III) के लिये 8-हाइड्राक्सी क्विनोलीन-5-(p-टॉलिल) सल्फोनैमाइड को नवीन भारमापी अभिकर्मक के लिये प्रयुक्त किया गया है।

Abstract

8-Hydroxy quinoline-5-(p-tolyl) sulphonamide as a new gravimetric reagent for Cr(III). *By* G. D. Tiwari and M. N. Misra, Department of Chemistry, V. S. S. D. College, Nawabgang, Kanpur.

8-hydroxy quinolino-5- (p-tolyl) sulphonamide (HQTS) has been used as a new reagent for Cr(III) estimation. HQTS forms a green coloured complex with Cr(III).

क्विनोलीन सल्फोनैमाइडों का उपयोग ओषधियों के रूप में हुआ है[1,2] किन्तु भारमापी अभिकर्मकों के रूप में इनके सम्प्रयोग की ओर कोई ध्यान नहीं दिया है[3]। प्रस्तुत सूचना में हमने 8-हाइड्राक्सी क्विनोलिनो-5-(p-टॉलिल) सल्फोनैमाइड (HQTS) को Cr(III) के निर्धारण के लिये एक नवीन भारमापी अभिकर्मक के लिये प्रयुक्त किया गया है। धातु-संकीर्ण को पी-एच 8.0 पर अवक्षेपित करके $Cr\,(C_{16}H_{13}SN_2O_3)_3$ के रूप में तौला जाता है। HQTS की सहायता से Cr(III) का निर्धारण Ca(II), Sr(II), Ba(II), Zn(II), Ni(II), तथा Ag(I) धातु आयनों की उपस्थिति में किया जा सकता है। केवल Ru(III), Pd(II), Rh(III) तथा Tl(I) व्यतिकारी हैं। HQTS Cr(III) के साथ हरे रंग का संकीर्ण बनाता है।

सभी अभिकर्मक वैश्लेषिक कोटि के थे। सभी पी-एच मापन कैम्ब्रिज-पी-एच मापी बेंच माडल द्वारा किये गए।

HQTS की तैयारी : इसको दो चरणों में तैयार किया गया।

(1) सर्वप्रथम क्लोरोसल्फोनिक अम्ल के साथ आक्सीन की अभिक्रिया कराकर 8-हाइड्राक्सी क्विनोलीन-5-सल्फोनिल क्लोराइड प्राप्त किया गया।

(2) तब इस सल्फोनिल क्लोराइड को ऐल्कोहल में विलयित किया गया और इसे ऐल्कोहल में बने p-टोल्वीडीन के विलयन में डाला गया जिससे HQTS बना! इसे छानकर सुखा लिया गया और आसुत जल में से इसका पुन:क्रिस्टलन किया गया।

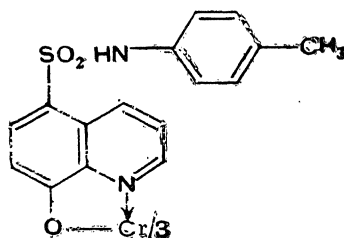
प्रयोगात्मक

Cr(III) का भारात्मक निर्धारण : $CrCl_3$ का 0.1 M संग्रह विलयन तैयार करके 400 मिली० पाइरेक्स बीकर में 150 मिली० तक तनूकृत किया गया और 21-30 मिली० 0.1N NaOH तथा 50 मिली० 0.1M H_3BO_3 द्वारा पी-एच को 8.0 पर स्थिर किया गया। इसके बाद आसुत जल में बने HQTS के विलयन को लगातार विलोडन के साथ धीरे-धीरे तब तक मिलाया गया जब तक कि अभिकर्मक की अधिक मात्रा डालने पर भी कोई अवक्षेप प्राप्त नहीं होता। इस प्रकार निर्मित संकीर्ण को जल उष्मक में 15-20 मिनट तक पाचित किया गया। संकीर्ण को सिन्टरित कांच G_4 मूषा में से होकर छाना गया और Cl^- आयन हटाने के लिए आसुत जल से भलीभांति धोया गया। संकीर्ण को ओवेन में 110-115° से० पर स्थिर भार आने तक सुखाया गया और $Cr(C_{16}H_{13}SN_2O_3)_3$ के रूप में तौल लिया गया।

Cr (III) संकीर्ण का विश्लेषण

	%C	%N	%S	% धातु
प्राप्त	58·26	8·41	9·77	5.31
$Cr(C_{16}H_{13}SN_2O_3)_3$ के लिए परिगणित	58·12	8·47	9·68	5·24

धातु लिगैण्ड अनुपात का निश्चयन चालकतामापी अनुमापन तथा जाब की संतत विचरण विधि से किया गया। यह अनुपात 3 : 1 प्राप्त हुआ। इसका अणु-सूत्र ir स्पेक्ट्रम द्वारा तथा तत्वों के लिये विश्लेषण द्वारा सम्पुष्ट किया गया। इसके लिये प्रदत्त संरचना (चित्र 1) नोर्टिया[4] द्वारा प्रस्तावित संरचना के अनुरूप है।



चित्र 1

निष्कर्ष : HQTS एक उत्तम भारात्मक अभिकर्मक है क्योंकि

(क) यह जल में विलेय है

(ख) अवक्षेप 2-3 दिन तक विलयन में स्थायी रहता है

(ग) यह 200° से० पर भी विघटित नहीं होता।

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक (एम० एन० मिश्र) डी० जी० एच० एस० दिल्ली द्वारा आर्थिक सहायता के लिये आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. एल्मर प्राफिट तथा गर्हार्ड बकमान, Arzneimittel Forsch, 1960, **10**, 181-84.

2. हिसाको निशिहारा, **जर्न० बायो० केमि०** (जापान), 1953, **40**, 579-87.

3. फिलिप्स, जे० पी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1950, **72**, 3159-61.

4. नोर्टिया, त्योवो **ऐक्टा केमि० स्कैण्डी०**, 1955, **9**, 861-62.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 243-247

पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड संकुल

कु० कविता पेड़नेकर, एस० सिद्दीकी तथा एस० एस० गुप्ता
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—दिसम्बर 9, 1981]

सारांश

चालकतामूलक अनुमापन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात हुआ कि मलेरिया औषधियों में पेरिमिथेमीन (डाराप्रिम), मैंगनीज क्लोराइड के साथ ऐल्कोहल माध्यम में 1:1 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (ir) से भी की गई है। संकुल का स्थायित्व स्थिरांक (log K) 6·12 पाया गया।

Abstract

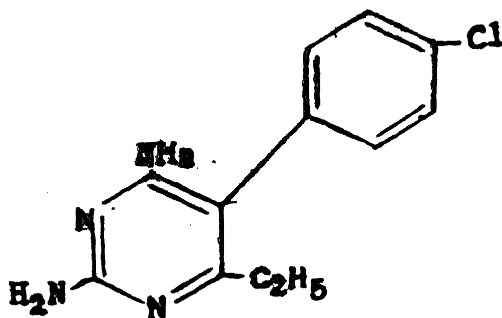
Perimethamine-manganese chloride complex. *By* Ku. Kavita Pendnekar, S. Siddiqui and S. S. Gupta, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Perimethamine, an antimalarial, forms 1:1 complex with mangnese chloride in the alcoholic solutions as indicated by conductivity measurements and analytical data. Structure assigned is supported by i.r spectral bands. Stability constant (log K) is 6·12.

पेरिमिथेमीन (I), 2-4 डाइ ऐमीनो-5- p-क्लोरोफेनिल-6-एथिल पिरिमिडीन को डाराप्रिम के नाम से भी जाना जाता है। धातुओं के साथ ऐन्टीमलेरियल के संकुलों के अध्ययन[1-7] को आगे बढ़ाते हुए प्रस्तुत शोध पत्र में पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड संकुल वर्णित किया गया है।

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन : (अ) पेरिमिथेमीन बेस (0·01 M) तथा मैंगनीज क्लोराइड (0·02 M) के मानक विलयन 90% शुद्ध एथेनॉल में बनाये गये। लिगैन्ड के 10 मिली० विलयन को 50 मिली०



(I)

तक तनु किया गया तथा उसका अनुमापन धातु विलयन के साथ "तोशनीवाल" चालकतामापी द्वारा 30° सें० पर किया गया। आयतन संशोधन के बाद प्राप्त परिणाम 1:1 पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड संकुल की पुष्टि करते हैं (चित्र 1)

(ब) जॉब[8] की संतत विचरण विधि द्वारा भी स्पेक्ट्रममापी से 1:1 पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड संकुल की पुष्टि होती है। इस हेतु मूल यौगिक तथा धातु समआण्विक विलयन द्वारा दो सान्द्रताओं, 0·0005 M तथा 0·0066 M, पर दो वक्र खींचे गये (चित्र 2)।

वियोजन तथा विश्लेषण

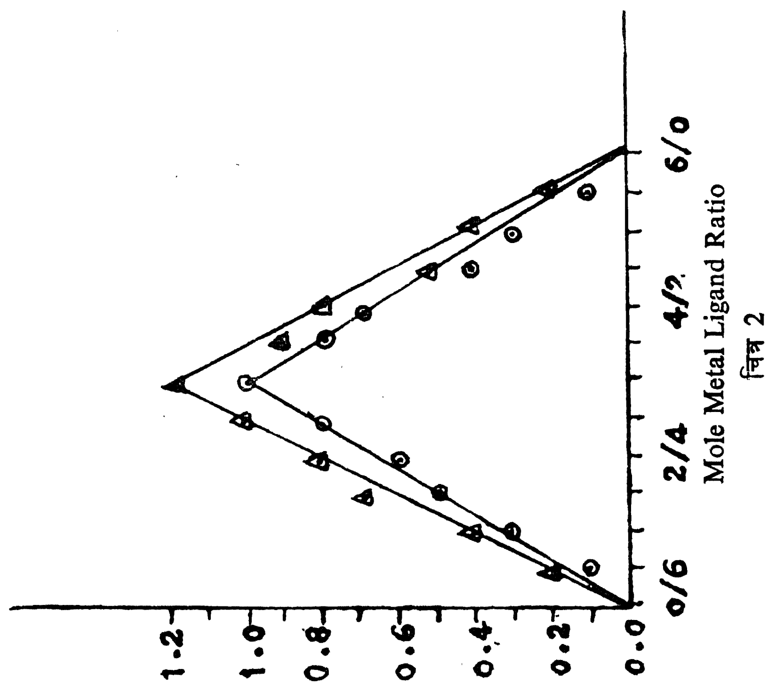
पेरिमिथेमीन बेस 1 ग्राम तथा मैंगनीज क्लोराइड 0·8 ग्राम को समआण्विक अनुपात में परिशुद्ध ऐल्कोहल की अल्पमात्रा में अलग-अलग घोला गया। पेरिमिथेमीन विलयन को मैंगनीज क्लोराइड विलयन में धीरे-धीरे सतत विलोडन करते हुए मिलाया गया; फलस्वरूप गहरे भूरे रंग का संकुल तुरन्त प्राप्त हुआ। मिश्रण को दो घंटे तक हिलाया गया। संकुल को छानकर तथा परिशुद्ध ऐल्कोहल से धोकर सुखाया गया।

प्राप्ति 1·0873 ग्राम। संकुल का गलनांक 255° सें०।

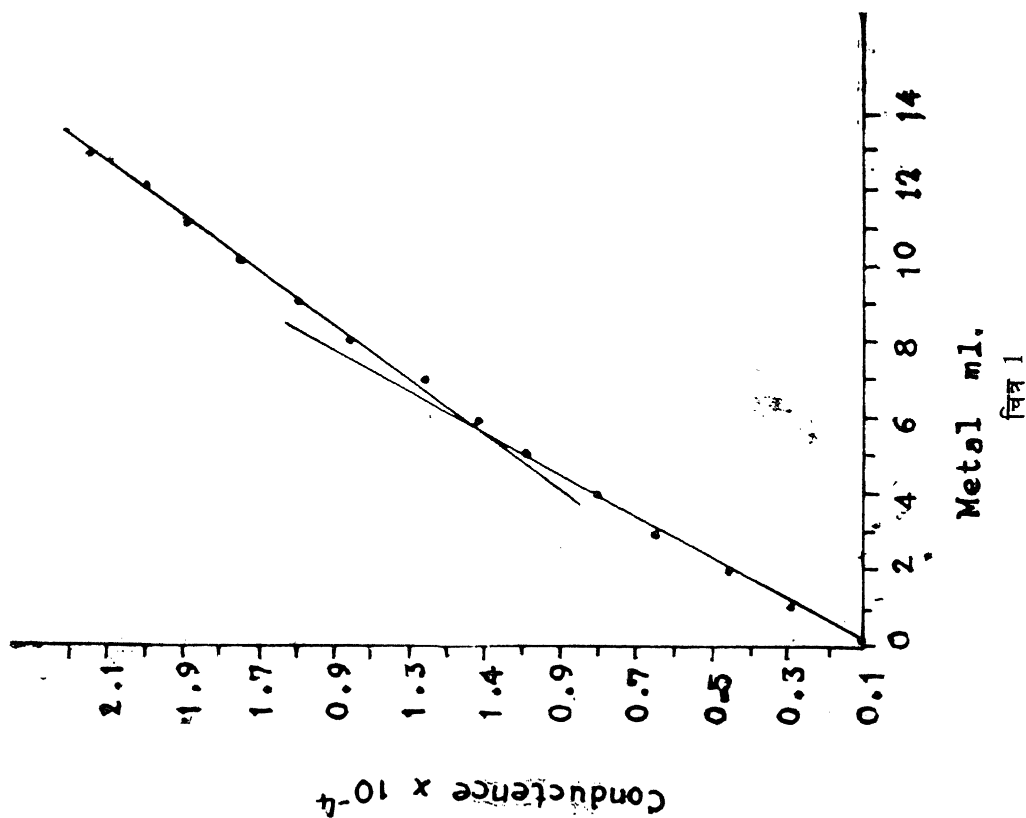
संकुल में Mn, 13·48; Cl, 15·87; C, 34·47; H, 3·64; N, 12·96% प्राप्त हुए जब कि $C_{12}N_4H_{13}Cl\,(MnCl_2).\,3H_2O$ में सिद्धान्त: Mn, 12·82; Cl, 16·58; C, 33·62; H, 4·43; N, 13·04 होना चाहिए।

विवेचना

चालकतामापी अनुमापन तथा जॉब की संतत विधि से यह ज्ञात होता है कि पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड के साथ 1:1 संकुल बनाता है। तत्वों के विश्लेषण से पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड अणुसूत्र


Mole Metal Ligand Ratio
0/6
2/4
4/2
6/0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2

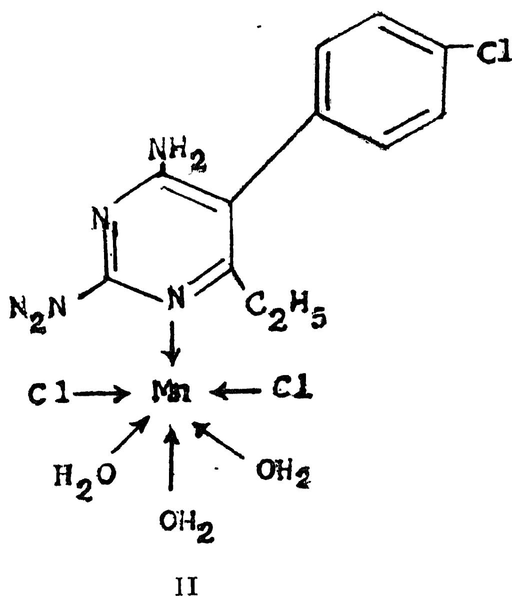
चित्र 2


Metal ml.
Conductence x 10-4
0
2
4
6
8
10
12
14
0.1
0.3
0.5
0.7
0.9
1.4
1.3
0.9
1.7
1.9
2.1

चित्र 1

$C_{12} N_4 H_{13} Cl (MnCl_2). 3 H_2O$ से मेल खाता है । संकुल को पानी की अल्प मात्रा के साथ उबाले जाने पर तथा छनित में क्लोराइड की जाँच करने पर सफेद अवक्षेप नहीं देता है, जिससे यह स्पष्ट होता है कि क्लोरीन परमाणु अनायनिक है ।

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड संकुल को संरचना II द्वारा निरूपित किया जा सकता है ।



II

संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रम KBr डिस्क विधि से पर्किन एल्मर मॉडल 377, स्पेक्ट्रममापी द्वारा प्राप्त किये गये । संकुल संरचना II की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रमों द्वारा निम्न प्रकार से होती है । पेरिमिथेमीन-मैंगनीज क्लोराइड संकुल में Mn—N का अवशोषण बैंड 595 cm^{-1} पर प्राप्त होता है जबकि मूल यौगिक में ऐसा कोई अवशोषण बैंड नहीं है । संकुल संरचना में उपसहसंयोजक जल की पुष्टि अवशोषण बैंड 825, 1650 तथा 3140 cm^{-1} द्वारा होती है । संकुल का स्थायित्व स्थिरांक (log K) 6·12 तथा तदनुसार मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($\triangle F$)=−8·45 किलोकैलोरी प्रति मोल ज्ञात किया गया ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक शोधकार्य हेतु सुविधाएँ प्रदान करने के लिए मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल के प्राचार्य डॉ० के० सी० निगम के अत्यन्त आभारी हैं । शुद्ध पेरिमिथेमीन की प्राप्ति के लिए लेखक बरोज-वेलकम एण्ड कं० बम्बई के भी आभारी हैं ।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 649.
2. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 769.
3. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1975, **52**, 642.
4. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 242.
5. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका**, 1978, **20**, 261.
6. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1980, **57**, 97.
7. गुप्ता, एस० एस० तथा कु० गुप्ता, कुमुद, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका**, 1980, **23(1)**, 65.
8. जॉब, पी०, **एन० कीम०** 1938, **10**, 113; 1936, **8**, 97.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 249-250

मक्का में एक नयी लैंगिक असामान्यता

डी० एन० शुक्ल, नरेन्द्र सिंह तथा एस० एन० भार्गव
वनस्पति विज्ञान विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—फरवरी 3, 1981]

सारांश

इलाहाबाद में मक्का के पौधे में एक ऐसी लैंगिक असामान्यता देखी गयी जिसमें नर तथा मादा पुष्पक्रम एक अक्ष में थे तथा नर पुष्पक्रम मादा पुष्पक्रम के नीचे था।

Abstract

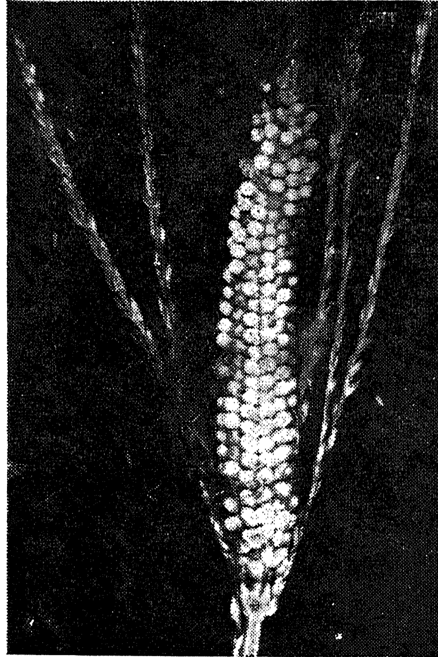
An anomalous sexual condition in corn. *By* D. N. Shukla, Narendra Singh and S. N. Bhargava, Botany Department, Allahabad University, Allahabad.

In corn an anomalous sexual condition in which male and pistillate inflorescence were born on the same axis, female inflorescencc above and male inflorescence just below, was observed.

सामान्यतः मक्का के पौधे में नर पुष्पक्रम मादा पुष्पक्रम के काफी ऊपर अग्रस्थ तथा मादा पुष्पक्रम कक्षस्थ होता है।

इलाहाबाद जनपद में मक्का की फसल का सर्वेक्षण करते समय इसके पुष्पक्रमों की एक ऐसी असामान्य स्थिति देखी गयी जिसमें नर एवं मादा पुष्पक्रम एक ही अक्ष में थे। इतना ही नहीं, मादा पुष्पक्रम, नर पुष्पक्रम के नीचे होने के बजाय ऊपर था। भुट्टे में दाने अविकसित तथा अर्धविकसित स्थिति में थे। नर पुष्पक्रम से तीन सामान्य पुंकेसर तथा उनके परागकण जीवित अवस्था में पाये गये चित्र 1।

यह स्थिति वीदरवैक्स[1] द्वारा वर्णित पुष्पक्रम के एकदम विलोम है। उन्होंने इन असामान्यताओं का कारण भौगोलिक परिस्थितियाँ तथा वंशानुक्रम का प्रभाव बताया है।



चित्र 2

यह लैंगिक असामान्यता मक्का के विकासक्रम पर प्रकाश डालती है। इसके अनुसार सम्भवतः मक्का के पौधे का मूल वह पौधा हो सकता है जिसमें मादा एवं नर पुष्पक्रम एक अक्ष में एकदम ऊपर नीचे ही रहे होंगे।

निर्देश

1. वीदरवैक्स, पी०, Corn and Corn Improvement (Ed. by Spraque, G. F.) एकैडेमिक प्रेस, इन्क, न्यूयार्क, 1955, 699.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 251-258

बेल बहुपद तथा सम्बद्ध संक्रियात्मक सूत्र का सार्वीकरण

पी० एन० राय तथा एस० एन० सिंह

गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—दिसम्बर 5, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में सार्वीकृत बेल बहुपदों पर आगे शोध कार्य करते हुए इनसे सम्बद्ध अनेक फलों-यथा सुनिश्चित व्यंजक, जनक फलन तथा संक्रियात्मक सूत्र को स्थापित किया गया है।

Abstract

Generalization of Bell polynomials and related operational formula. *By* P. N. Rai and S. N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

In this paper the generalized Bell polynomials have been subjected to further investigation and various results associated with them, viz explicit expression, the generating function and the operational formula have been established.

बेल के बहुपदों[5]

$$H_n(g, h) = (-1)^n e^{-hg} D^n e^{hg}, \quad D \equiv \frac{d}{dx} \tag{1}$$

तथा सिंह के सार्वीकृत ट्रसडेल बहुपद[6]

$$T_n^{\alpha}(x, r, p) = x^{-\alpha} \exp(px^{\gamma}) (x D)^n (x^{\alpha} \exp(-px^{\gamma})), \tag{2}$$

का अनुगमन करते हुए श्रीवास्तव[7] ने सार्वीकृत बहुपद $Gn(h, g)$ को निम्न रूप प्रदान किया है

$$G_n(h, g) = e^{-hg} (x D)^n e^{hg}, \tag{3}$$

सिंह का सार्वीकरण गूल्ड-हार्पर[3] के हर्माइट बहुपद के सार्वीकरण से प्रेरित था और इस रूप में था

$$H_n^{(\gamma)}(x, a, p)=(-1)^n x^{-\alpha} \exp(px^\gamma) D^n (x^a \exp(-px^\gamma)). \tag{4}$$

समीकरण (2) तथा (4) से अनुप्राणित होकर चन्देल[2] ने सार्वीकृत स्टर्लिंग बहुपद $T_n^{(a, k)}(x, \gamma, p)$ को निम्नवत् परिभाषित किया है

$$T_n^{(\alpha, k)}(x, \gamma, p)=x^{-a-(k-1)n} \exp(px^\gamma)(x^k D)^n (x^a \exp(-px^\gamma)), \tag{5}$$

चन्देल के सार्वीकरण में चक[1] के सार्वीकृत बहुपद

$$G_{n, k}^{(\alpha)}(x)=x^{-a} e^x (x^k D)^n (x^\alpha e^{-x}.) \tag{6}$$

पर भी ध्यान दिया गया। उपर्युक्त सार्वीकरणों का अनुसरण करते हुए विजय[9] ने एक अन्य सार्वीकृत बहुपद को सम्बन्ध

$$G_n^{(k)}(h, g)=e^{-hg}(x^k D)^n e^{hg}, \tag{7}$$

द्वारा परिभाषित किया। श्रीवास्तव ने देखा कि सार्वीकृत लागेर बहुपद[8]

$$T_{nr}^{(\alpha)}(x, p)=\frac{1}{n!} x^{-a-1-n} \exp(px^r)(x^2 D)^n (x^{\alpha+1} \exp(-px^r)), \tag{8}$$

(7) की विशिष्ट दशा है।

अब उपर्युक्त सार्वीकरणों का पालन करते हुए सार्वीकृत बहुपद सेट को निम्न रूप में देखना रुचिकर होगा

$$G_{n,k}^q(h, g)=\exp(-hg)\; T_{k, q}^n \exp(hg), \tag{9}$$

जहाँ आपरेटर $T_{k, q} \equiv x^q(k+x D)$, h, k तथा q प्राचल हैं और g फलन है x का।

इस फलन का सूत्रपात महत्वपूर्ण है क्योंकि ऊपर दिये गये समस्त सार्वीकरण इसी फलन से व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

जोशी तथा प्रजापत[4] ने सार्वीकृत बहुपद को इस प्रकार परिभाषित किया

$$M_{vn}^{(a)}(x, k, q)=\frac{1}{n!} x^{-a-nq} \exp(p_v(x))\; T_{k, q}^n (x^\alpha \exp(p_v(x))) \tag{10}$$

यह स्पष्ट दिखाई पड़ता है कि (10) भी (9) की विशिष्ट दशा के रूप में है।

(9) में परिभाषित बहुपदों को सार्वीकृत बेल बहुपद कहा जाता है। प्रस्तुत प्रपत्र में बहुपद (9) पर और आगे शोधकार्य बढ़ाया गया है और इनसे सम्बद्ध अनेक फल सुनिश्चित व्यंजक जनक फलन तथा संक्रियात्मक सूत्र स्थापित किये गये हैं।

2. आपरेटर $T_{k,q}$

आपरेटर $T_{k,q}$ को जिन कुछ गुणों का यहाँ उपयोग किया जावेगा, उनमें से कुछ इस प्रकार हैं :

$$T^n_{k,q}(x^\alpha)=q^n\left(\frac{\alpha+k}{q}\right)_n x^{\alpha+nq}, \tag{11}$$

$$T^n_{k,q}(u\,v)=\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{n} T^{n-m}_{k,q}(V)\,T^m_{1,q}(u);\ T^m_{1,q}\equiv x^q(1+x\,D), \tag{12}$$

$$e^{tT_{k,q}}f(x)=(1-x^q\,qt)^{-k/q}f[x(1-qt\,x^q)^{-1/q}], \tag{13}$$

$$e^{tT_{k,q}}(uv=e^{tT_{k,q}}(u)\,e^{tT_{k,q}}(v), \tag{14}$$

$$F(T_{k;q})[x^\alpha g(x)]=x^\alpha F(T_{k,q}+\alpha x^q)\,g(x), \tag{15}$$

$$F(T_{k,q})[e^{hg}f(x)]=e^{hg}F(T_{k,q}+x^{q+1}hg'(x))\,.f(x), \tag{16}$$

जहाँ $g'(x)=D\,g(x)$.

आगमन द्वारा

$$T^n_{k,q}=x^{nq}\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha+k+j\,q),\quad \delta\equiv x\,D, \tag{17}$$

सुनिश्चित सूत्र

(9) तथा (17) से

$$G^q_{n,k}(h,g)=\exp(-hg)\,x^{nq}\prod_{j=0}^{n-1}(\delta+k+j_q)\exp(hg)$$

$$=x^{nq}\prod_{j=0}^{n-1}(xhg'(x)+k+j_q)$$

$$=x^{nq}q^n\left(\frac{xhg'(x)+k}{q}\right)_n \tag{18}$$

समीकरण (18) बहुपद (9) का अभीप्सित रूप है।

जनक फलन

(9) से हमें

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{t}{n!} \exp(-hg)\ T_{k,q}^{n} \exp(hg)$$

$$=\exp(-hg) \exp(tT_{k,q}) \exp(hg),$$

प्राप्त होता है जो (13) के सम्प्रयोग से हमें निम्नवत् जनक फलन प्रदान करता है

$$\sum_{h=0}^{\infty} G_{n,k}^{q}(h, g) \frac{t^n}{n!} = (1-qtx^q)^{-k/q} \exp[h\{g(x(1-qtx)^{-1/q}(-g(x)\}] \tag{19}$$

$k=0$ तथा $q=k-1$ होने पर बहुपद $G^q{}_{n,k}(h, g)$ समानीत होता है $G_n^{(k)}(h, g)$ में[9] । $G^k{}_n(h, g)$ के जनक फलन को भी (19) में इन्हें प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है ।

प्रसार

(9) तथा (12) की सहायता से बहुपद $G^q{}_{n,k}(h, g)$ के लिए निम्नलिखित रोचक परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं

$$G_{n,k}^{q}(h+g+f) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} G_{n-m,k}^{q}(h, g)\ G_{m,1}^{q}(h, f), \tag{20}$$

$$G_{n,k}^{q}(h+l, g) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} G_{n-m,k}^{q}(h, g)\ G_{m,1}^{q}(l, g) \tag{21}$$

तथा

$$G_{n,k}^{q}(a, hg+lf) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} G_{n-m,k}^{q}(ah, g)\ G_{m,l}^{q}(al, f) \tag{22}$$

जहाँ a, h तथा l प्राचल हैं, f तथा g फलन हैं x के । (21) विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होगा :

$$G_{n,k}^{q}(2h, g) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} G_{n-m,k}^{q}(h, g)\ G_{m,l}^{q}(h, g), \tag{23}$$

आपरेटर Φ :

(16) तथा (9) की सहायता से हमें सम्बन्ध

$$G_{n,k}^{q}(h, g) = [T_{k,q} + x^{q+1} h\, g'(x)]^n.\ 1. \tag{24}$$

प्राप्त होता है । $\Phi = T_{k,\, q} + x^{q+1}\, h\, g'(x)$, रखने पर

$$G^{q}_{n,\, k}(h, g) = \Phi^{n} \,.\, 1. \tag{25}$$

आपरेटर Φ से गूल्ड-हार्पर[3] द्वारा प्रदत्त समरूपी आपरेटरों का सार्वीकरण हो जाता है,

$$\oint \equiv D + \frac{\alpha}{x} - p\, r\, x^{\gamma - 1}, \tag{26}$$

सिंह[6]

$$\oint \equiv x\, D + \alpha - p\, r\, x^{\gamma},$$

श्रीवास्तव[7]

$$\mathscr{D} \equiv x\, D + xhg'(x), \tag{28}$$

चन्देल[2]

$$\oint \equiv x^{k}\, \mathrm{D} + \alpha x^{k-1} - prx^{k+r-1} \tag{29}$$

तथा विजय[9]

$$\Phi \equiv \theta + x^{k}\, hg'(x). \tag{30}$$

अब $G^{q}_{n,\, k}(h, g)$ पर आपरेट करने पर Φ प्रदान करता है :

$$\Phi\, G^{q}_{n,\, k}(h, g) = \Phi \,.\, \Phi^{n} \,.\, 1 = \Phi^{n+1} \,.\, 1 = G^{q}_{n+1,\, k}(h, g) \tag{31}$$

अतः (31) से Φ की बारम्बार संक्रिया से

$$\Phi^{m}\, G^{q}_{n,\, k}(h, g) = G^{\,q}_{n+m,\, k}(h, g), \tag{32}$$

प्राप्त होता है । (25) तथा (31) से हम देखते हैं कि

$$\Phi^{n+m} \,.\, 1 = \Phi^{n}\; G^{q}_{m, k}(h, g) = \Phi^{m}\, G^{q}_{n,\, \mathrm{k}}(h, g) = G^{q}_{\mathrm{n}+m,\, k}(h, g). \tag{33}$$

संक्रियात्मक सूत्र

बहुपद $G^{q}_{n,\, k}(h, g)$ के संक्रियात्मक सूत्र के लिए हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करना चाहते हैं ।

प्रमेय

यदि r कोई यादृच्छिक संख्या हो, तो

$$x^{nr}\, G^{q}_{n,\, k}(h, g) = \prod_{i=1}^{n} \left(x^{r}\, T_{k, q} + x^{r+q+1}\, hg'(x) - (n-i)\, r x^{q+r}\right) .\, 1 \tag{34}$$

उपपत्ति : हम निम्न पर विचार करेंगे

$$T^n_{k,q}(\exp(hg)f)$$

$$=T^{n-1}_{k,q}(T_{k,q}(\exp(hg)f))$$

$$=T^{n-1}_{k,q}[\exp(hg)(T_{k,q}+x^{q+1}hg'(x))f]$$

$$=T^{n-1}_{k,q}[x^{-\gamma}\exp(hg)(x^{\gamma}T_{k,q}+x^{q+r+1}hg'(x))f].$$

अब माना

$$f_1=(x^r T_{k,q}+x^{q+r+1}hg'(x))f).$$

अतः $\quad T^{n-1}_{k,q}(x^{-\gamma}\exp(hg)f_1)$

$$=T^{n-2}_{k,q}[x^{-2r}\exp(hg)(x^r T_{k,q}+x^{r+q+1}hg'(x)-r\,x^{r+q})f_1].$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$T^n_{k,q}(\exp(hg)f)=T^{n-2}_{k,q}[x^{-2r}\exp(hg)(x^r T_{k,q}+x^{r+q+1}hg'(x)-rx^{q+r})$$

$$\cdot(x^r T_{k,q}+x^{q+r+1}hg'(x))f],$$

जो, प्रक्रिया की पुनरावृत्ति के कारण (35) प्रदान करता है

$$T^n_{k,q}(\exp(hg)f)=x^{-nr}\exp(hg)\prod_{i=1}^{n}(x^r T_{k,q}+x^{r+q+1}hg'(x)-$$

$$(n-i)\,r\,x^{q+r})f \qquad (35)$$

जहाँ दक्षिण पक्ष का गुणनफल क्रियात्मक रूप में है और r एक काल्पनिक प्राचल है।

पुनः

$$T^n_{k,q}(\exp(hg)f)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}T^{n-1}_{k,q}\exp(hg)\;T^i_{1,q}(f)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\exp(hg)\;G^q_{n-i,k}(h,g)\,T^i_{1,q}f. \qquad (36)$$

अत: (35) तथा (36) की सहायता से

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} G^{q}_{n-i,\, k}(h, g)\, T^{i}_{1,\, q}(f)$$

$$= x^{-nr} \prod_{i=1}^{n} (x^{\gamma}\, T_{k,\, q} + x^{\gamma+q+1}\, hg'(x) - (n-i)\, rx^{q+r})\, f. \tag{37}$$

यह रोचक है कि (37) से हमें कई नवीन संक्रियात्मक सूत्र $G^{q}_{n,\, k}(h, g)$ की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

जब $f=1$, तो समीकरण (37) प्रदान करता है :

$$G^{q}_{n,\, k}(h, g) = x^{-nr} \prod_{i+1}^{n} (x^{r}\, T_{k,\, q} + x^{r+q+1}\, hg'(x) - (n-i)\, rx^{q+r})\, .\, 1$$

यह वांछित समीकरण (34) है जिससे अभीप्सित प्रमेय की उपपत्ति पूरी होती है।

विशिष्ट दशाएँ

विशेषत: (38) मे $r=0$ होने पर

$$G^{q}_{n,\, k}(h, g) = [T_{k,\, q} + x^{q+1}\, hg'(x)]^{n}\, .\, 1 \tag{39}$$

जो समीकरण (24) के अतिरिक्त और कुछ नहीं है।

(38) में $k=0$ तथा $q=k-1$ रखने पर बहुपद $G^{q}_{n,\, k}(h, g)$ समानीत होता है $G^{k}_{n}(h, g)$ में[9] और इस तरह

$$G^{k}_{n}\ (h, g) = x^{-nr} \prod_{i-1}^{n} (x^{k+r}\, hg'(x) - (n-i)\, rx^{k+r+1} + x^{k+r} D)\, .\, 1 \tag{40}$$

इसी प्रकार (38) में विभिन्न प्राचलों के विशिष्टीकरण से विजय[9] के कई परिणाम (5.6) से (5.11) तक प्राप्त किये जा सकते हैं।

यहाँ पर हम जोशी तथा प्रजापत[4] द्वारा परिभाषित एक रोचक दशा पर विचार करेंगे।

$h=1$ तथा $g=\alpha \log x - p_{v}(x)$, रखने पर हमें सम्बन्ध

$$G^{q}_{n,\, k}(1, \alpha \log x - p_{v}(x)) = x^{nq}\, n!\, M^{(\alpha)}_{vn}(x, k, q), \tag{41}$$

प्राप्त होता है। अब इसमें सम्बन्ध (18) का उपयोग करके सुस्पष्ट रूप को इस प्रकार दिया जा सकता है

$$M_{vn}^{(\alpha)}(x, k, q)=\frac{1}{n!}\, q^n\left(\frac{\alpha-xp'v\ (x)+k}{q}\right)_n \tag{42}$$

(19) की सहायता से जनक सम्बन्ध निम्न रूप में प्राप्त होगा

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{nq}\, M_{vn}^{(\alpha)}(x, k, q)\, t^n=(1-qtx^q)^{-\alpha+k/q} \exp\,[p_v(x)-p_v(x(1-qtx^q)^{-1/q})]. \tag{43}$$

(34) के द्वारा कथित बहुपद के संक्रियात्मक सूत्र को निम्न प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है

$$M_{vn}^{(\alpha)}(x, k, q)=\frac{x^{-nr-nq}}{n!}\prod_{i=1}^{n}[x^r\, T_{k,\,q}+(\alpha-(n-i)r)\, x^{q+r}-x^{r+q+1}\, p_v'(x)]. \tag{44}$$

परिणाम (42), (43) तथा (44) नवीन हैं।

निर्देश

1. चक, ए० एम०, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1956, **23**, 45-55.
2. चन्देल, आर० सी० एस०, **इण्डियन मैथ० सोसायटी** के 34वें अधिवेशन, बंगलोर में प्रस्तुत
3. गूल्ड, एच० डब्लू० तथा हार्पर, ए० टी०, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1962, **29**, 51-64.
4. जोशी, सी० एम० तथा प्रजापत, एम० एल०, **क्युंगपक मैथ० जर्न०**, 1975, **15**(2), 191-199.
5. रायरडान, जे० An Introduction to Combinatorial Analysis 1958.
6. सिंह, आर० पी Riv. Mat. Univ. Parma, 1967, **2**(8), 345-353.
7. श्रीवास्तव, पी० एन०, Publ. Inst. Mat. Nov. series. Tome 1969, **9**(23) 43-46.
8. वही, (प्रेषित)
9. विजय, ओ० पी०, Pub. De, L. Inst. Math. Nov. Ser. Tome 1975, **19**(33), 173-180.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 259-263

ऐपेल फलन F_4 के लिए असमिका

वी० एम० भिसे तथा ए० जी० लागू

गणित विभाग, जी० एस० इंस्टीट्यूट आफ साइंस एण्ड टेक्नालाजी, इन्दौर

[प्राप्त--फरवरी 14, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में ल्यूक के पूर्वज्ञात परिणामों की सहायता से F_4 के लिए एक असमिका प्राप्त की गई है। परिणामों की पुष्टि एक सांख्यिक उदाहरण के द्वारा की गई है।

Abstract

Inequality for Appell function F_4. *By* V. M. Bhise and A. G. Lagoo, Department of Mathematics, G. S. Institute of Science and Technology, Indore.

In this paper we have obtained an equality for F_4 with the help of earlier results by Luke. The results have been supported with a numerical example.

1. प्रस्तावना

हाल ही में ल्यूक[1] ने दो चरों वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के लिए असमिकाओं की स्थापना की है। उन्होंने F_1, F_2, F_3 ऐपेल फलनों पर विचार किया है। प्रस्तुत प्रपत्र में ल्यूक[2] द्वारा पूर्वप्राप्त परिणामों की सहायता से हमने F_4 के लिये एक असमिका प्राप्त की है। चूँकि F_4 के यूलरी समाकल निरूपण में तीन द्विपद फलनों का समावेश रहता है फलतः परिणाम लम्बे होते हैं। फिर भी हमने परिणामों को ठोस रूप में रखने का प्रयत्न किया है। अन्त में हमने परिणामों की सम्पुष्टि एक सांख्यिक उदाहरण के द्वारा की है।

2. F_4 के लिये असमिका

1_4 को निम्नवत् प्रदर्शित किया जा सकता है[3]

$$F_4 \equiv F_4\,(a,\, b\; c,\, \mathbf{c};\; -x(1+y),\; -y(1+x)) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\mathbf{c})}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,F(c-a)\,\Gamma(\mathbf{c}-b)}$$

$$x\int_0^1\int_0^1 \frac{u^{a-1}\,(1-u)^{c-a-1}\,v^{b-1}\,(1-v)^{\mathbf{c}-b-1}\,\mathrm{du\,dv}}{(1+ux)^b\,(1+vy)^m\,[1+yv/(1+ux)]^n}$$

जहाँ $m=c+\mathbf{c}-b-1,\ n=a+b+1-c-\mathbf{c},\ R(c)>R(a)>0,\ R(c)>R(b)>0,$

$$|\arg(1+x)|<\pi,\ |\arg(1+y)|<\pi,\ |\arg(1+x+y)|<\pi$$

$$F_4(a, b, c, \mathbf{c}; -x(1+y), -y(1+x)=F_4(b, a, \mathbf{c}, c,; -y(1+x), -x(1+y)$$

$$F_4=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}\,(b)_{m+n}\,(-x)^m\,(-y)^n}{(c)_m\,(\mathbf{c})_n\,m!\,n!}\ ,\ |x^{1/2}|+|y^{1/2}|<1$$

न तो $\mathbf{c}$, न c ही ऋणात्मक पूर्णांक या शून्य है।

प्रमेय

$$\frac{a_1}{(1+bmy/\mathbf{c})\,(a_1-b)}\left[\frac{a_2}{Y_{a_1}}+\frac{1-b}{Y_b}\right]-a_2\,b_3\left[b'\,X_{a_1}+\frac{a_1b''\,X_{a1}}{a_1-b_7}-\frac{b}{(a_1-b_7)\,Y_{b7}}\right]$$

$$=\frac{a_2b_4b_1b'}{a_1-b_1}\left[(a_1-1)\,X_{a_1}+(1-b_1)\,X_{b_1}\right]$$

$$-a_2b_4b_1b''\left[\frac{a_1a_2X_{a1}}{(a_1-b_7)\,(a_1-b_1)}+\frac{b_1(1-b_1)\,X_{b1}}{(a_1-b_1)\,(b_1-b_7)}-\frac{b_7\,(1-b_7)}{(a_1-b_7)\,(b_1-b_7)\,Y_{b7}}\right]$$

$$\langle F_4$$

$$F_4\langle m'(n'+n''\,b_3)\,(b'+b''\,X_{b7})$$

$$+m'n''\,b_4b'\left(1-\frac{1-b_2}{Y_{b_2}}\right)-\frac{m'n''b''\,b_4b_2}{b_2-b_7}\left[\frac{1-b_2}{Y_{b_2}}-(1-b_7)\,X_{b7}\right]$$

$$+m''n'\,(b_3+b_4b_5)\,(b'+b''X_{b7})+2a_1n''\,(b_3+b_4b_5)$$

$$-\left[\frac{b'}{a_3}\left\{1+(a_3-1)\,X_{a_3}\right\}+\frac{b''}{a_3-b_7}\left\{(a_3-1)\,X_{a_3}+(1-b_7)X_{b7}\right\}\right]$$

$$+2a_2b_6m''\left[\frac{b(1-b)\,X_b}{(a_3-b)\,(b_6-b)}-\frac{a_3(a_3-1)}{(a_3-b_6)\,(a_3-b)\,Y_{a_3}}-\frac{b_6(1-b_6)}{(a_3-b_6)(b_6-b)\,Y_{b6}}\right] \qquad (2.1)$$

जहाँ $a_1=\dfrac{m}{m-n},\ a_2=\dfrac{n}{m-n},\ a_3=\dfrac{1+m}{m-n},\ b_1=\dfrac{\mathbf{c}+1}{(\mathbf{c}+1)(b+1)ny},$

$$b_2=\frac{2(\mathbf{c}+1)}{2(\mathbf{c}+1)+(b+1)\,(1+n)y},\ b_3=\frac{\mathbf{c}-b}{\mathbf{c}(b+1)},\ b_4=\frac{b(\mathbf{c}+1)}{\mathbf{c}(b+1)},$$

$$b_5=\frac{2(c+1)}{2(c+1)+(b+1)\,(1+m)y},\ b_6=\frac{2c}{2c+b(1+n)y},\ b_7=\frac{1+b}{2},$$

$b'=\frac{1-b}{1+b}$ इसी प्रकार m' तथा n'

$b''=\frac{2b}{1+b}$ इसी प्रकार m'' तथा n''

$X_{a_1}=\frac{c-a}{c(a+1)}+\frac{a(c+1)}{c(a+1)}\left[1+\frac{a+1}{c+1}xa_1\right]^{-1}$, इसी प्रकार X_b, X_{b_1}, X_{b_7} तथा X_{a_3}

$Y_{a_1}=1+\frac{ax}{c}a_1$ इसी प्रकार Y_{a_3}, Y_b, Y_{b_2}, Y_{b_6} तथा Y_{b_7}

$$1>m>n>0,\quad c>b>0,\quad 0<b<1,\quad c>a>0,\quad x>0,\quad y>0$$

$$2(c+1)\,(1-b)>(b+1)^2\,(1+n)y$$

उपपत्ति

हमें ल्यूक[2] के निम्नलिखित ज्ञात परिणामों की आवश्यकता होगी :

$$(1+bz)^{-1}<(1+z)^{-b}<\frac{1-b}{1+b}+\frac{2b}{1+b}\left[1+\frac{1+b}{2}z\right]^{-1},\quad 0<b<1 \tag{2.2}$$

$$_2F_1\,(a,\,b;\,c;\,-z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1\frac{t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\,dt}{(1+zt)^b},\ R(c)>R(a)>0,$$

$$|\arg\,(1+z)|<\pi \tag{2.3}$$

$$(1+az/c)^{-1}<{}_2F_1(a,\,1;\,c;\,-z)<\frac{c-a}{c(a+1)}+\frac{a(c+1)}{c(a+1)}\left[1+\frac{a+1}{c+1}z\right]^{-1},\ z>0,\ c\geqslant a>0 \tag{2.4}$$

$(1+vy)^m$ तथा $\left(1+\frac{vy}{1+ux}\right)^n$, में (2.2) को प्रयुक्त करने, आंशिक अनुपात तथा (2.3) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित असमिका प्राप्त होती है :

$$\lambda\int_0^1\frac{u^{a-1}\,(1-u)^{c-a-1}}{(1+ux)^b}\left[\frac{a_1(1+ux)}{1+a_1xu}\,{}_2F_1\,(b,\,1;\,c;-my)-\frac{a_2}{1+a_1xu}\right.$$

$$\left.{}_2F_1\left(b,\,1;\,c;\,-\frac{nv}{1+ux}\right)\right]du$$

$$<F_4<m'\,n'\,\lambda\int_0^1\frac{u^{a-1}\,(1-u)^{c-a-1}\,du}{(1+ux)^b}+m'\,n''\,\lambda\int_0^1\frac{u^{a-1}\,(1-u)^{c-a-1}}{(1+ux)^b}$$

$$ {}_2F_1\left(b,\ 1;\ c;\ -\frac{1+n}{2}\cdot\frac{y}{1+ux}\right)du $$

$$ +m''\,n'\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}}{(1+ux)^b}\,{}_2F_1\left(b,\ 1;\ c;\ -\frac{1+m}{2}y\right)du $$

$$ +2a_1\,n''\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1+ux)}{(1+ux)^b(1+a_3\,xu)}\,{}_2F_1\left(b,\ 1;\ c;\ -\frac{1+m}{2}y\right)du $$

$$ -2a_2\,m''\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}}{(1+ux)^b(1+a_3\,xu)}\,{}_2F_1\left(b,\ 1;\ c;\ -\frac{1+n}{2}\cdot\frac{y}{1-ux}\right)du \quad (2.5) $$

जहाँ
$$ \lambda=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)},\ 1>m>n>0,\quad c>b>0,\quad x>0,\quad y>0. $$

(2.5) के प्रत्येक ${}_2F_1$ में (2.4) को व्यवहृत करने पर

$$ \frac{a_1\lambda}{(1+bmy/c)}\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1+ux)\,dx}{(1+ux)^b(1+a_1\,xu)}-a_2\,b_3\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\,du}{(1+ux)^b(1+a_1xu)} $$

$$ -a_2b_4b_1\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1+ux)\,du}{(1+ux)^b(1+a_1xu)(1+b_1xu)}<F_4<m'n'\lambda $$

$$ \int_0^1 \frac{u^{c-1}(1-u)^{c-a-1}\,du}{(1+ux)^b} $$

$$ +m'\,n''\,\lambda\int\frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}}{(1+ux)^b}\left[b_3+h_4b_2\frac{(1+ux)}{(1+b_2\,xu)}\right]du $$

$$ +m''\,n'\,(b_3+b_4\,b_5)\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\,du}{(1+ux)^b} $$

$$ +2a_1\,n''\,(b_3+b_4\,b_5)\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1+ux)\,du}{(1+ux)^b(1+a_3\,xu)} $$

$$ -2a_2\,m''\,b_6\,\lambda\int_0^1 \frac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1+ux)\,du}{(1+ux)^b(1+a_3xu)(1+b_6xu)},\ 1>m>0,\ c>b>0,\ x>0\ y>0 $$

$(1+ux)^b$ के लिए असमिका (2.2) का सही-सही प्रयोग करने पर हमें निम्न रूप में पद प्राप्त होते हैं

$$ \frac{1+ux}{(1+au)(1+bu)}=\frac{1}{(a-b)}\left[\frac{a-x}{1+au}+\frac{x-b}{1+bu},\right]\ a>b>0 $$

$$ \frac{1+ux}{(1+au)(1+bu)(1+cu)} $$

$$= \frac{1}{(a-c)(a-b)(b-c)} \left[\frac{a(a-x)(b-c)}{1+au} + \frac{b(x-b)(a-c)}{1+bu} - \frac{c(x-c)(a-b)}{1+cu} \right],$$

$$a > b > c > 0$$

तब (2.3) की सहायता से तथा प्रत्येक ${}_2F_1$ में (2.4) के सम्प्रयोग से हमें (2.1) की प्राप्ति होती है

3. सांख्यिक उदाहरण

(2.1) में

$$a = \frac{1}{3},\quad b = \frac{1}{5},\quad c = \frac{2}{3},\quad c = \frac{3}{4},\quad x = \frac{1}{4},\quad y = \frac{1}{2},$$

रखने पर हमें $0.9082456 < F_4 = 0.9345044 < 1.0720494$ प्राप्त होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय प्रो० डी० जी० धवलिकर, निदेशक, जी० एस० इंस्टीट्यूट आफ साइंस एण्ड टेक्नालाजी, इन्दौर के कृतज्ञ हैं जिन्होंने सुविधाएँ प्रदान करने की कृपा की।

निर्देश

1. ल्यूक, वाई० एल० J. Approximation Theory, 1974, **11**(1), 73-84.
2. वही, वही, 1972, **5**, 41-65.
3. एर्डेल्यी, ए०, मैग्नस, डब्लू०, ओबरहेटिंगर, एफ० तथा ट्राइकोमाइ एफ० जी०, "Higher Transcendental Functions" भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982 Pages, 265-267

जोशी प्रभाव की उत्पत्ति में जिंक सल्फाइड चूर्ण द्वारा पृष्ठीय संदूषण का महत्व

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त—अक्टूबर 13, 1981]

सारांश

ओज़ोनित्र उत्तेजन के दौरान जोशी प्रभाव की उत्पत्ति पर जिंक सल्फाइड चूर्ण द्वारा पृष्ठीय संदूषण के प्रभाव का अध्ययन किया गया। जिंक सल्फाइड संदूषण ने ऋणात्मक जोशी प्रभाव $\triangle i$ को विकसित किया जो कि बाद के काल-प्रभावन द्वारा तिरोहित हो गया। $\triangle i$ के लिए जोशी सिद्धान्त में अभिगृहीत जोशी तल के लक्षणों के आधार पर प्राप्त परिणामों की व्याख्या की गई है।

Abstract

Role of surface contamination by zinc sulphide powder in the production of Joshi effect. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Deparment, Meerut College, Meerut.

Influence of surface contamination by zinc sulphide powder on the production of the Joshi effect $\triangle i$ under ozonizer excitation has been studied. ZnS contamination developed negative Joshi effect $-\triangle i$ which was afterwards erased by aging. The results have been explained by considering the characteristics of Joshi layer postulated in Joshi theory for $\triangle i$.

विसर्जन के दौरान, उत्तेजित कणों, आयनों तथा इलेक्ट्रॉनों से बने और कम कार्य-फलन लक्षणयुक्त एक अधिशोषण-सदृश भित्ति-तल या जोशी तल की निर्मिति की जोशी प्रभाव $\triangle i$ के लिये भौतिक सिद्धान्त[1] में परिकल्पना की गई है। $\triangle i$ का चिह्न तथा परिमाण जोशी तल की प्रकृति पर निर्भर होता है[2]। विविध सल्फाइडों की विभिन्न प्रकाश वैद्युत् सक्रियता होती है। सल्फाइडों का अत्यन्त सूक्ष्म मात्रा में भित्ति पर संदूषण का $\triangle i$ की उत्पत्ति पर महत्वपूर्ण प्रभाव पड़ सकता है। अतः जोशी प्रभाव की उत्पत्ति पर जिंक सल्फ़ाइड चूर्ण द्वारा पृष्ठीय संदूषण के प्रभाव का प्रस्तुत अध्ययन हाथ में लिया गया।

प्रयोगात्मक

समस्त प्रयुक्त काँच उपकरण तथा विद्युत् परिपथ पूर्वप्रकाशित प्रयोगों[3, 4] के समान थे। ओज़ोनित्र को, जिसकी तली में थोड़े-से Zn S चूर्ण से भरी एक परखनली रखी थी, टॉप्लर पंप द्वारा निर्वातित करके उसका मुँह बन्द कर दिया गया। वलयाकार दीवारों को संदूषित करने के लिए, ओज़ोनित्र को उलटकर, जिंक सल्फाइड चूर्ण को हिलाकर, ओज़ोनित्र को पुनः सीधा खड़ा करके हिलाया गया जिससे कि शेष ज़िंक सल्फाइड चूर्ण परखनली में एकत्रित हो गया।

परिणाम तथा विवेचना

1·06 kV, 50 Hz पर 4 घंटे के काल-प्रभावन के बाद भी बिना संदूषित ओज़ोनित्र में $\triangle i$ का प्रेक्षण नहीं हुआ। ZnS चूर्ण द्वारा संदूषण के तुरन्त बाद, 0·48 kV पर अधिकतम $-11\%\triangle i$ का प्रेक्षण हुआ जोकि घटकर 0·64 kV पर शून्य हो गया। संदूषण के कारण देहली विभव Vm 0·53 kV से घटकर 0·37 kV हो गया, और विसर्जन धारा i_D 14 से बढ़कर 103 हो गई। 1·06 kV पर 4 घंटे के काल-प्रभावन से $\triangle i$ घटकर शून्य हो गया। 4 घंटे के विश्राम से i_D घटकर 14 रह गयी। विश्राम के बाद $\triangle i$ का प्रेक्षण नहीं हुआ। असंदूषित नली में प्रेक्षित करेंट ओसिलोग्रामों की 4 घंटे के विश्राम के बाद वालों के साथ तुलना करने से विभंग संकुलित h. f. स्पंदों का पता लगा जिसपर किरणन का किसी भी प्रकार का कोई प्रभाव नहीं था, जोंकि $\triangle i$ की अनुपस्थिति का द्योतक। है पुनर्संदूषण से 0·42 kV पर -25% $\triangle i$ मिला जोकि घटकर 1·06 kV पर शून्य हो गया।

जिंक सल्फाइड के भित्ति संदूषण द्वारा $-\triangle i$ उत्पन्न हुआ जोकि काल-प्रभावन द्वारा तिरोहित हो गया। अकालप्रभावित नली में संदूषण के तुरत बाद $-11\%\triangle i$ का प्रेक्षण प्रदर्शित करता है कि जोशी तल के लिए उत्तरदायी अधिशोषण तात्क्षणिक है, अतः यह भौतिक या वान्डर वाल्स अधिशोषण प्रकार का है। काल-प्रभावन का $-\triangle i$ को घटाकर शून्य करना सिद्ध करता है कि यह लेंगम्यूर अधिशोषण या रासायनिक शोषण है; तात्क्षणिक प्रक्रम की गति की कल्पना नहीं की जा सकती है। अस्तु, जोशी तल में दोनों वान्डर वाल्स तथा लेंगम्यूर अधिशोषणों के लक्षण होते हैं।

क्योंकि ZnS सदृश पृष्ठीय यौगिकों का इलेक्ट्रोड तल पर निक्षेपण $-\triangle i$ का परिमाण न केवल बढ़ाता ही है वरन् इसको शून्य से विकसित भी करता है, यह बहुत सार्थकतापूर्ण है। इस प्रकार के ध्रुवीय पदार्थों की उत्प्रेरक सक्रियता, पदार्थों की पृष्ठ पर उपलब्ध बलों के द्वारा गैस के शोषण से, वर्द्धित सांद्रण के कारण होती है[5]।

CuS[6], MnS[7] तथा ZnS के संदूषण के बाद प्रेक्षित $-\%\triangle i$ के अधिकतम मान क्रमशः 56, 24 तथा 11 थे। इनकी तुलना इन सल्फाइडों के प्रकाशवैद्युत् गुणधर्मों से की जा सकती है जो कि 391:155:80 (स्वेच्छिक मात्रक में) के अनुपात में होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

श्री के० खरे के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस०, **करेंट साइंस**, 1947, **16**, 19.
2. प्रसाद, जे०, **रिव्यु० रुमेन किम०**, 1973, **18**, 1075.
3. प्रसाद, जे०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1972, **15**, 79.
4. प्रसाद, जे०, **ऐक्टा सिएसिया इण्डिका**, 1974, **1**, 13.
5. नोरिश, आर० जी० डब्लू०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1923, **123**, 3006.
6. प्रसाद, जे०, **रिव्यु० रुमेन किम०**, 1979 (प्रेषित)
7. प्रसाद, जे०, **जुह्र० फिजि० खिम०**, 1981 (प्रेषित)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 269-273

सल्फाडाइजीन सैलीसिलअल्डीमीन के संक्रमण तत्व संकर

आर० आर० गुप्ता, कु० उषा तथा आर० कौशल

होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर

[प्राप्त—जून 1, 1982]

सारांश

सल्फाडाइजीन सैलीसिअलल्डीमीन (स० से० अ०) के संकरों का अध्ययन चालकता की सहायता से जॉब की संतत परिवर्तन विधि द्वारा किया गया है। द्विसंयोजी एवं एकसंयोजी धातुओं के लिए लीगैण्ड धातु अनुपात क्रमश: 2 : 1 एवं 1 : 1 पाया गया। संकरों के स्थायित्व स्थिरांकों (log K) एवं संभवन की मुक्त ऊर्जाओं ($\triangle F$) की गणना की गयी है। ठोस अवस्था में प्राप्त संकर लवणों के वैश्लेषिक आँकड़े इन अनुपातों की पुष्टि करते हैं।

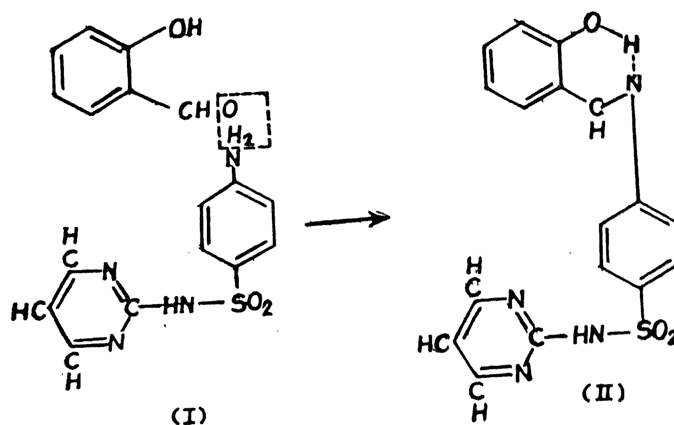
Abstract

The complexes of sulphadiazine salicylaldimine. *By* R. R. Gupta, Km. Usha and R. Kaushal, Holkar Degree College, Indore.

The complexes of sulphadiazine salicylaldimine (SUDSA) have been studied conductometrically by Job's method of continuous variation. The ligand metal ratios for bivalent and monovalent metal were found to be 2:1 and 1:1 respectively. The stability constants (log K) and free energy of formation ($-\triangle F$) of complexes are evaluated. The analytical results of isolated complexes confirm these ratios.

सल्फोनामाइड सिद्धिप्राप्त भैषज हैं। टेकियो सुकामाटो[1] ने ब्रोमो सैलीसिलअल्डीमीन तैयार किये जो तपेदिक-रोधी पाये गये। सल्फानिलामाइड एवं सैलीसिलअल्डीहाइड से प्राप्त कुछ शिफ-बेसों के संकर लवणों का अध्ययन मरिया मैक्रोविची तथा अन्य[2] और मुकर्जी तथा रे[3] ने भी किया है।

सल्फोनामाइड-सैलीसिलअल्डीमीन[4, 5, 6] पर किये गये हमारे अनुसन्धानकार्य की श्रृंखला में यहाँ हम भैषज महत्व की धातुओं Cu^{2+}, Ag^{++}, Mn^{++}, Fe^{++} एवं Co^{++} के साथ सल्फाडाइजीन सैलीसिलअल्डीमीन (स० से० आ० II) के संकर लवणों का अध्ययन-सार प्रस्तुत कर रहे हैं।



प्रयोगात्मक

अभिकर्मक एवं रसायन : निम्न रसायनों का उपयोग किया गया जो विशिष्ट शुद्ध अथवा एनालार कोटि के थे।

सल्फाडाइजीन गलनांक 253° सें०, सैलीसिलअल्डीहाइड, क्वथ० 196° सें०, कॉपर मैंगनीज एवं कोबाल्ट के ऐसीटेट, सिल्वर नाइट्रेट तथा फेरस सल्फेट।

सल्फाडाइजीन सैलीसिलअल्डीमीन (स० सै० अ० II) : इसे बनाने के लिए सल्फाडाइजीन (2·50 ग्रा०) एवं सैलीसिलअल्डीहाइड (1·22 ग्रा०) के गरम ऐल्कोहल में निर्मित सम-आणविक (सम-मोलर) विलयनों को मिलाया गया तो 5-10 मिनिट में पीले-क्रीम रंग के सूच्याकार क्रिस्टल बने। इन्हें छानकर, प्रक्षालित कर गर्म एथेनॉल से पुनःक्रिस्टलीकृत किया गया। प्राप्ति 3·0 ग्रा०, गलनांक 255° सें० (बटलर एवं इंगले[7] के अनुसार 258° सें०)।

पोटैशियम परमैंगनेट पर आसुत एवं आयन-विहीन जल को चालकता जल के रूप में उपयोग किया गया। लीगैण्ड एवं धातु-लवणों के $1{\cdot}25\times10^{-3}M$ विलयन पिरिडीन के चार प्रतिशत जलीय विलयन में बनाये गये। संकरक-धातु अनुपात, चालकता-निर्देश गुण द्वारा जॉब[8] की संतत परिवर्तन विधि से ज्ञात किये गये।

संकरों की प्राप्ति : सल्फाडाइजीन (0·01 मोल, ग्रामाणु) को 50 प्रतिशत एथेनॉल में घाला गया। सल्फाडाइजीन के इस एथेनालिक विलयन में 50 प्रतिशत एथेनॉल में निर्मित सैलीसिलअल्डीहाइड (0·01 मोल) एवं धात्विक लवणों के विलयन एकसाथ मिलाये गये एवं मिश्रण को जल-ऊष्मक पर एक-डेढ़ घण्टे के लिए पश्चवाहित (reflux) किया गया। गर्म विलयन को छानकर रेफ्रीजरेटर में 0° सें० पर रखा गया। 12 घण्टे पश्चात् संकर-लवण (संकर) क्रिस्टलीकृत हुआ। इसे छानकर क्रमशः जल एवं गर्म एथेनॉल से प्रक्षालित किया गया तथा अन्त में शुष्क ईथर से प्रक्षालन कर सुखा लिया गया।

यह उल्लेखनीय है कि अभिकारकों की भिन्न-भिन्न ग्राम-अणुक सान्द्रताएं लेने पर भी प्रत्येक दशा में केवल एक ही संकर प्राप्त हुआ। द्विसंयोजी धातुओं-कॉपर, मैंगनीज, आयरन एवं कोबाल्ट के साथ केवल 2:1 एवं एक-संयोजी सिल्वर के साथ 1:1 संकर बना। इसकी पुष्टि जॉब की विधि एवं सारणी 2 में प्रस्तुत वैश्लेषिक आँकड़ों से होती है।

विभिन्न संकरों के बनाने के विवरण सारणी 1 में वर्णित हैं।

सारणी 1

प्रत्येक दशा में सल्फाडाइजीन 1·25 ग्राम (0·005 मोल) एवं सैलीसिलअल्डीहाइड 0·61 ग्राम (0·005 मोल) लिये गये।

क्रमांक	धात्विक लवण	ग्राम	गरम करने का समय (घंटों में)	प्राप्ति (ग्राम)	रंग	गलनांक	
1.	कॉपर एसीटेट	0·497	2	1·4	हरी सूच्याएं	247-50	
2.	सिल्वर नाइट्रेट	0·425	1·5	1·4	पीले श्वेत क्रिस्टल	290	वियोजन
3.	मैंगनीज ऐसीटेट	0·435	1	1·3	हल्के भूरे क्रिस्टल	234	वियोजन
4.	फेरस सल्फेट	0·695	1·5	1·5	भूरी सूच्याएं	234-36	वियोजन
5.	कोबाल्ट ऐसीटेट	0·445	1·5	1·6	हरे-भूरे क्रिस्टल	320	वियोजन

संकर लवण ऐसीटेट, नाइट्रेट एवं सल्फेट का परीक्षण नहीं देते हैं।

सारणी 2

		प्रतिशत					
		प्राप्त			वांछित		
क्रमांक	संकर	N	S	धातु	N	S	धातु
1.	$(C_{17}H_{13}O_3N_4S)_2$ Cu	14·35	7·50	7.93	14·33	8.19	8·13
2.	$(C_{17}H_{13}O_3N_4S)$ Ag	12·80	7·20	22·80	12·00	6·86	23·10
3.	$(C_{17}H_{13}O_3N_4S)_2$ Mn	13·88	8·75	7·43	14·50	8·29	7·11
4.	$(C_{17}H_{13}O_3N_4S)_2$ Fe	15·12	8·48	7·15	14·47	8·27	8·21
5.	$(C_{17}N_{13}O_3N_4S)_2$ Co	14·78	8·61	7·54	14·45	8·26	7·60

परिणाम तथा विवेचना

सल्फाडाइजीन (I) आणविक अनुपात में सैलीसिलअल्डीहाइड से क्रिया कर सल्फाडाइजीन सैलीसिलअल्डीमीन (II) देता है। कॉपर, मैंगनीज, आयरन एवं कोबाल्ट स० से० अ० संकरों के लिए प्राप्त उच्चिष्ट यह बताते हैं कि इन संकरों में संकरक-धातु अनुपात 2:1 है। सिल्वर-स० से० अ० संकर में प्राप्त उच्चिष्ट से स्पष्ट है कि संकर लवण 1:1 के अनुपात में बनता है।

संकरों के स्थायित्व-स्थिरांकों के मान जॉब-वक्रों का वहिर्वेशन कर इयो-जोन्स[9] द्वारा प्रस्तावित व्यंजक की सहायता से ज्ञात किए गए—

$$K=\frac{(A/A\ \text{Extr})C}{[Cm-(A/A\ \text{Ext})C]\,[Cn-(A/A\ \text{Ext.})C]}$$

प्राप्त परिणाम सारणी 3 में दिए गए हैं :

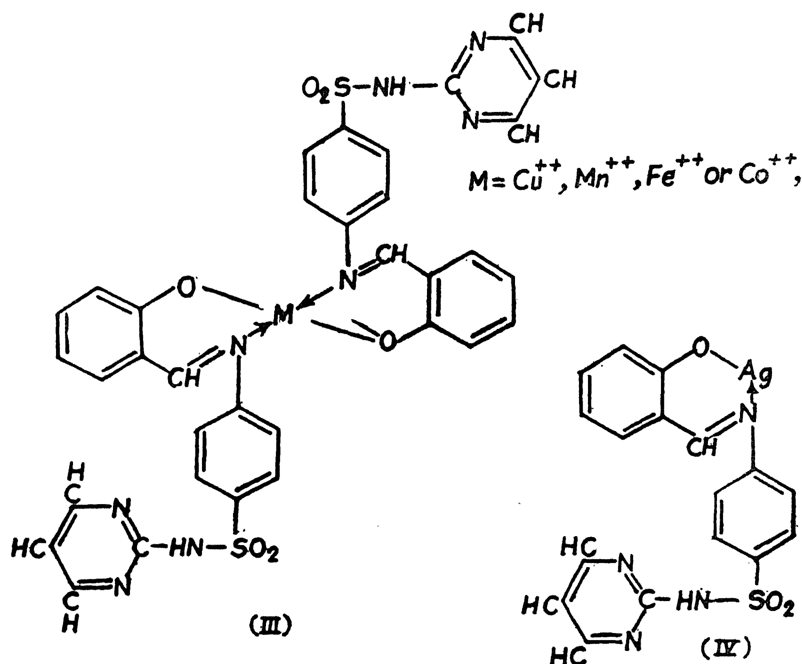
सारणी 3

क्र०	संकर	A	AExtr	Cm ($\times 10^{-4}$)	Cx ($\times 10^{-4}$)	C ($\times 10^{-4}$)	log K	$-\Delta F$ K Cals/mole
1.	Cu—SUDSA	0·100	0·114	4·16	8·32	4·16	4·20	2·48
2.	Ag—SUDSA	0·044	0·055	6·45	6·45	6·45	4·49	2·66
3.	Mn—SUDSA	0·08	0·11	4·16	8·32	4·16	4·70	2·98
4.	Fe —SUDSA	0·58	0.73	4·16	8·32	4·16	3·88	2·30
5.	Co—SUDSA	0·07	0·08	4·16	8·32	4·16	4·17	2·47

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर इन धात्विक संकर लवणों के लिए निम्न संरचना सूत्र (III एवं IV) प्रतिपादित किए जा सकते हैं :

इन कीलेट संरचना सूत्रों (III एवं IV) की पुष्टि इस बात से होती है कि ठोस अवस्था में प्राप्त किए गए संकर लवण धात्विक लवणों के ऋणायनों का परीक्षण नहीं देते हैं।

इसके अतिरिक्त इन संरचनाओं को हमारे पूर्व अनुसन्धान कार्य (इसी में वर्णित) से भी बल मिलता है, जिसमें हमने संक्रमण तत्वों के सल्फाथायोजोल सैसीसिलअल्डीमीन संकर लवणों के लिए भी समान प्रकार की संरचनाएं प्रतिपादित की हैं।



निर्देश

1. टैकियो सुकामाटो, **टकेड़ा फार्मास्युटिकल इन्डस्ट्रीज लि० जापान**, 1960, 5766, मई 25
2. मरिया मैक्रोविची तथा कॉन्स्ट घा०मैक्रोविची, **एकेडे० रिप० पोपुलरे रोमीने फिलियाला क्लज स्टडी सैर-सिटासी स्टिन्टी** 1955, Ser I (6) 115; कैम० एब्स० 1958, **52**, 14561
3. मुकर्जी, ए० आर० तथा रे०, पी० आर०, **जर्न इण्डियन केमि० सोसा०** 1955, **32**, 604-8.
4. गुप्ता, आर० आर० तथा कौशल, आर०, **जर्न इण्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 365.
5. गुप्ता, आर० आर० तथा कौशल,आर०, **इन्दौर यूनी० रिस० जर्न० साइंस**, 1975, **3**(1), 53-54.
6. गुप्ता, आर० आर० तथा कौशल, आर०, **जर्न इण्डियन केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 552-56.
7. बटलर, सी० जी०तथा इंगले, बी० एच० बी०, **जर्न फार्म० एण्ड फार्माकौल०** 1954, **6**, 806-15.
8. जौब पी०, **एना० केमि०**, 1936, **6**, 97.
9. रैले तथा सावेर ''एक्सपेरीमेण्ट्स फार इन्स्ट्रमेन्टल मैथड्स'' मेग्राहिल, 1961, पृ० 168.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages 275-281

क्वीनाइन-धातु संकुलों का अवरक्त स्पेक्ट्रमी अध्ययन

एस० एस० गुप्ता, एस० के० भारद्वाज तथा आर० कौशल

रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—अगस्त 10, 1982]

सारांश

क्वीनाइन तथा उससे बने कापर, सिल्वर, मरकरी, आयरन तथा कोबाल्ट लवणों के संकुलों का अवरक्त स्पेक्ट्रमी अध्ययन किया गया। लिगैंड के अवशोषण बैंड तथा संकुल बनने पर उनमें आये परिवर्तन की तुलना की गई। सभी संकुलों में धातु-नाइट्रोजन बैंड की आवृत्ति $650 \pm 10\ cm^{-1}$ पर पायी गई जबकि सिल्वर, आयरन एवं कोबाल्ट संकुलों में धातु-आक्सीजन आवृत्ति $670 \pm 10\ cm^{-1}$ पर पायी गई।

Abstract

Study of i. r. spectra of quinine-metal complexes. *By* S. S. Gupta, S. K. Bhardwaj and R. Kaushal, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Infrared absorption bands of quinine and its complexes with Cu, Ag, Hg, Fe and Co salts were studied. Comparative assignments were given to the absorption bands of ligand and the variations arose on complexation. Metal-nitrogen frequencies were observed at $650 \pm 10\ cm^{-1}$ in all the complexes while metal-oxygen frequencies at $670 \pm 10\ cm^{-1}$ in Ag, Fe, and Co complexes.

एन्टीमलेरियल पदार्थों के साथ धातुओं के संकुलों के अध्ययन[1-8] को आगे बढ़ाते हुए, प्रस्तुत शोध पत्र में अनेक महत्वपूर्ण अवरक्त स्पेक्ट्रमों का विश्लेषण किया गया है जिसके आधार पर संकुलों के संरचना-सूत्र प्रस्तावित किये गये हैं।

प्रयोगात्मक

धातुओं के विभिन्न संकुल, पिछले शोध पत्रों में वर्णित विधियों के अनुसार बनाये गये । इस हेतु क्वीनाइन बेस तथा धात्विक लवण की परिकलित मात्रा को अलग-अलग परिशुद्ध ऐल्कोहल में घोला गया । लीगेन्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ मिलाया गया । मिश्रण को बर्फ में 3 घंटे तक ठण्डा किया गया । संकुलों को छानकर तथा धोकर शुद्ध किया गया ।

संकुलों में धातुओं का निर्धारण विभिन्न विधियों से, नाइट्रोजन का जेल्डाल विधि से तथा जल का निर्धारण संकुलों को 115° से 120° से० ताप पर गरम करने से भार में होने वाली कमी द्वारा किया गया । सावधानीपूर्वक शोधित पदार्थों के अवरक्त स्पेक्ट्रम KBr डिस्क विधि से पर्किन-एल्मर माडल 237, स्पेक्ट्रममापी द्वारा प्राप्त किये गये (चित्र 1 से 7) इनमें से कुछ महत्वपूर्ण अवशोषण बैण्डों का अध्ययन नीचे दिया गया है ।

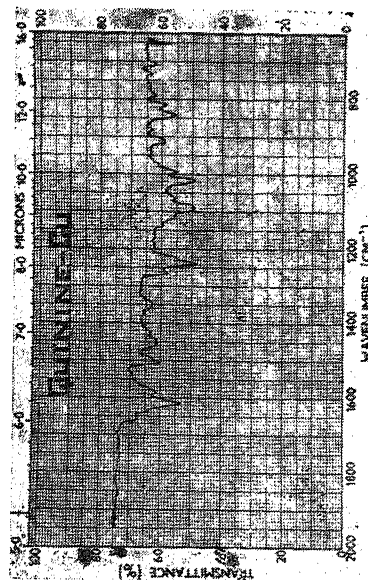
परिणाम तथा विवेचना

साधारणतः संकुल बनने पर लिगैन्ड के अवशोषण बैण्ड में परिवर्तन आ जाता है । ये बैण्ड निम्न क्षेत्र में धातु-नाइट्रोजन या धातु-आक्सीजन के तथा उच्च क्षेत्र में संयोजन आवृत्ति के हो सकते हैं । विभिन्न संकुलों की धातु-नाइट्रोजन तथा धातु-आक्सीजन आवृत्ति सारणी 1 में दी गई है ।

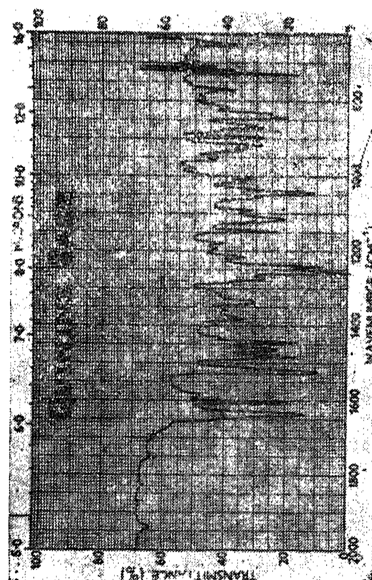
सारणी 1

अनुक्रमांक	संकुल का सूत्र	धातु-नाइट्रोजन आवृत्ति	धातु-आक्सीजन आवृत्ति	विशेष
1.	$C_{20}H_{21}O_2N_2 . CuCl_2$	650	—	
2.	$C_{20}H_{24}O_2N_2 . AgNO_3$	660	680	नाइट्रेट के कारण
3.	$C_{20}H_{24}O_2N_2 . HgCl_2$	650		
4.	$C_{20}H_{24}O_2N_2 . 2HgCl_2$	660		
5.	$C_{20}H_{24}O_2N_2 . FeSO_4 . H_2O$	650	660	सल्फेट तथा जल
6.	$C_{20}H_{24}O_2N_2 . CoCl_2 . H_2O$	645	680	सल्फेट तथा जल

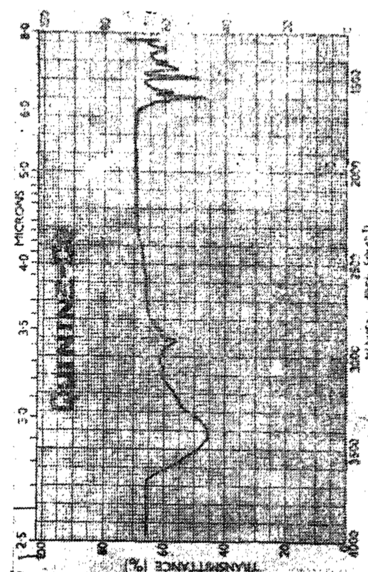
उपर्युक्त परिणाम चतुर्वेदी तथा कौशल[9], नाकामोटो[10], एवं गुप्ता तथा कौशल[11] द्वारा दी गई धातु-नाइट्रोजन आवृत्ति से मेल खाते हैं । क्विनाइन-सिल्वर संकुल नाइट्रेट की पुष्टि 810 तथा 1370 व 1380 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैण्ड द्वारा होती है, जबकि सिनकोनिन-आयरन संकुल में सल्फेट की उपस्थिति 1220 तथा 1350 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैण्ड द्वारा होती है । आयरन तथा कोबाल्ट


MICRONS
TRANSMITTANCE [%]
WAVENUMBER [CM⁻¹]

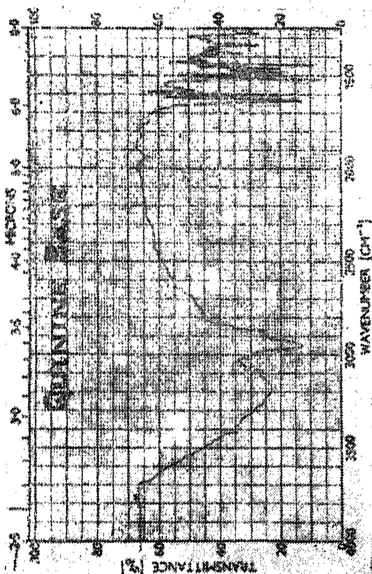
2


QUININE BASE
MICRONS
TRANSMITTANCE [%]
WAVENUMBER [CM⁻¹]

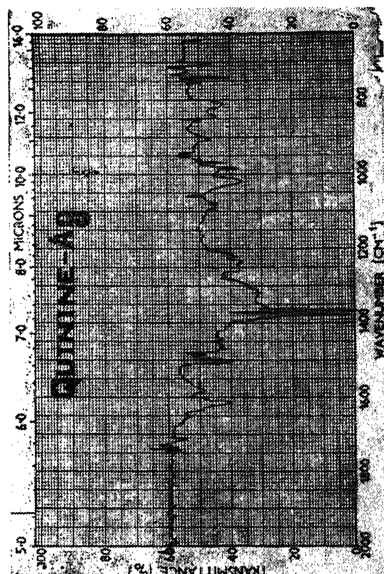
1


MICRONS
TRANSMITTANCE [%]
WAVENUMBER [CM⁻¹]

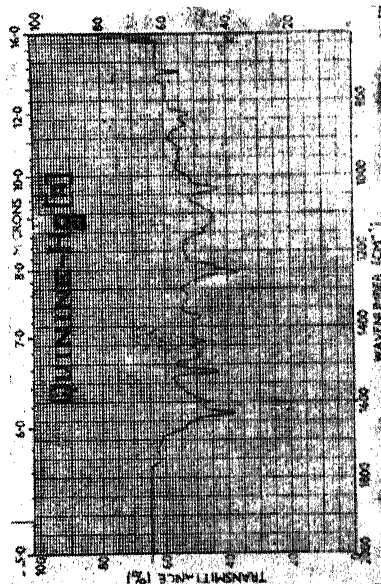
4

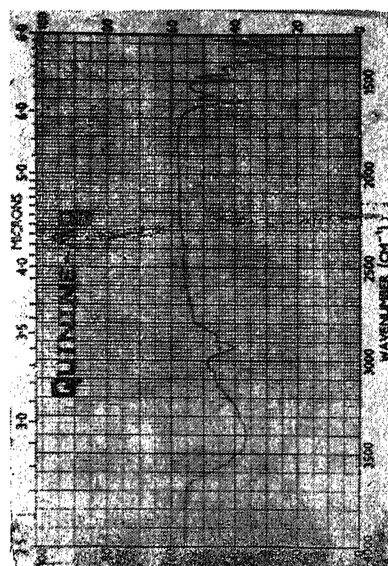

MICRONS
TRANSMITTANCE [%]
WAVENUMBER [CM⁻¹]

3

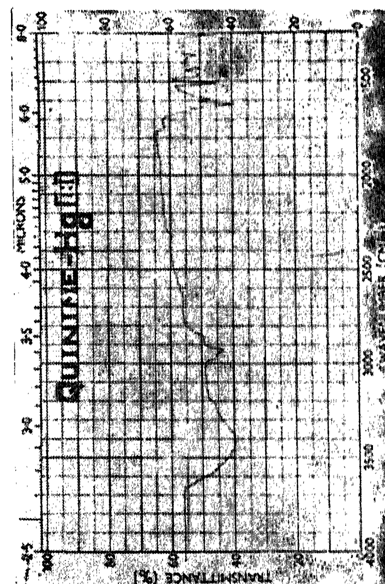

QUININE-Ag
MICRONS
WAVENUMBER (CM⁻¹)
TRANSMITTANCE (%)

6

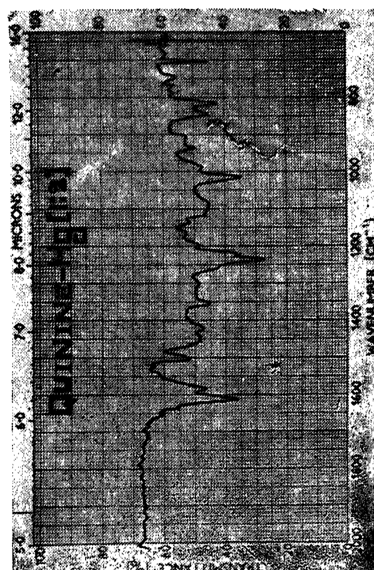

QUININE-Hg(II)
MICRONS
WAVENUMBER (CM⁻¹)
TRANSMITTANCE (%)


QUININE-Ag
MICRONS
WAVENUMBER (CM⁻¹)
TRANSMITTANCE (%)

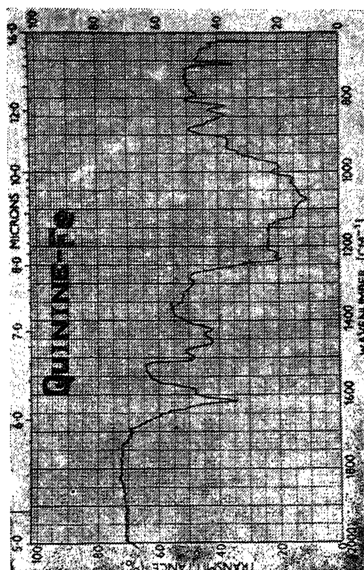
5


QUININE-Hg(II)
MICRONS
WAVENUMBER (CM⁻¹)
TRANSMITTANCE (%)

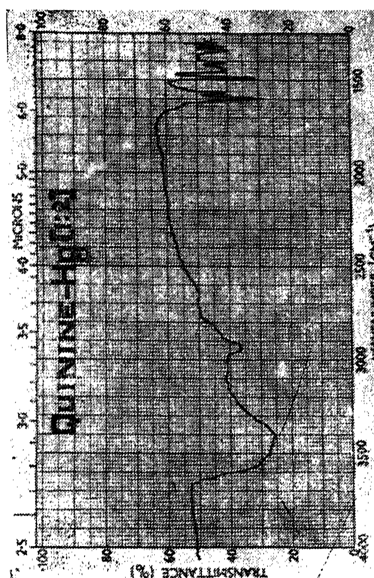
7



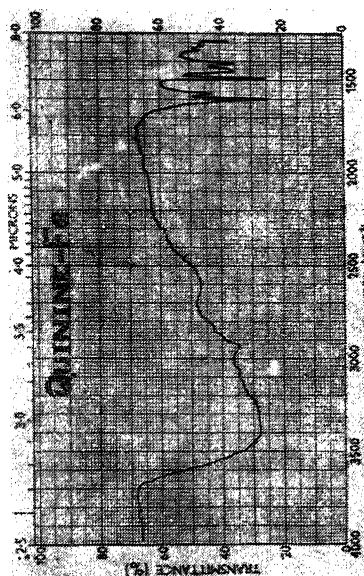
9



10



11

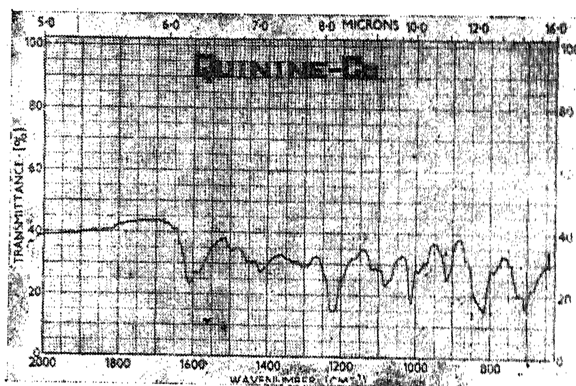


12

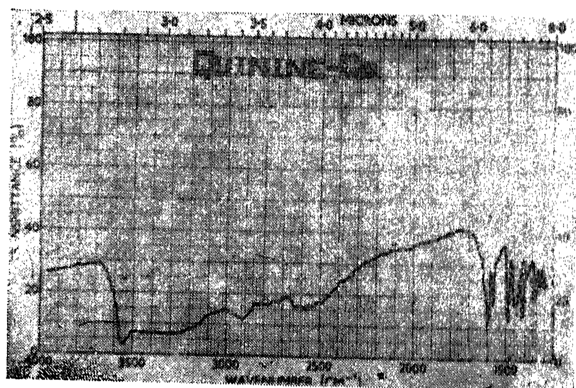
के संकुलों के विश्लेषण से यह ज्ञात हुआ कि इनमें एक अणु जल का भी उप-सहसंयोजकता द्वारा जुड़ा हुआ है, जिसकी पुष्टि निम्नलिखित अवशोषण बैण्ड द्वारा होती है।

क्वीनाइन-आयरन	क्वीनाइन-कोबाल्ट
820	820
3180	3190
3420	3500

संकुलों के अन्य अवशोषण बैण्ड का अध्ययन करने से यह पता लगा कि वाइनिल ग्रुप के अवशोषण बैण्ड में जो कि 920, 980, 1400, 1660 तथा 2950 cm^{-1} पर प्राप्त होते हैं, के अवशोषण बैण्ड में संकुल बनने के पूर्व एवं बाद में कोई विशेष परिवर्तन नहीं आया जिससे यह स्पष्ट होता है कि संकुल बनाने में वाइनिल ग्रुप का कोई योगदान नहीं है।



13



14

इसी प्रकार द्वितीय ऐल्कोहल ग्रुप में कापर, मरकरी तथा सिल्वर संकुलों के अवशोषण बैण्ड में कोई परिवर्तन नहीं पाया गया जबकि आयरन तथा कोबाल्ट के संकुलों में प्रत्येक में से 1080 तथा 2640 cm^{-1} पर अवशोषण पाया गया जो शुद्ध क्वीनाइन के 1060 तथा 2580 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैण्ड से भिन्न है। इससे यह स्पष्ट होता है कि केवल आयरन एवं कोबाल्ट संकुलों में ही द्वितीयक ऐल्कोहल ग्रुप भाग ले रहा है।

इस प्रकार प्रस्तुत शोधपत्र में दिए गए अवरक्त स्पेक्ट्रमों से तथा पिछले शोध पत्रों में दिये गये चालकता अनुमापनों से, स्पेक्ट्रमी प्रकाशमापी विधियों से, विश्लेषण आँकड़ों से एवं अन्य भौतिक-रासायनिक गुणों के आधार पर विभिन्न क्वीनाइन-धातु संकुलों को सरचनाएं (II से V) दी गई हैं। ये सभी संरचनाएं गुप्ता तथा कौशल[12] द्वारा दी गई सिनकोनिन-धातु संकुल संरचनाओं के अनुरूप हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विभिन्न संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रम निकालने के लिए भारत हेवी इलेक्ट्रीकल्स, भोपाल के एवं शोध कार्य में सुविधाएं प्रदान करने के लिए प्राचार्य, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल के आभारी है। शोध कार्य में आर्थिक सहायता हेतु लेखकवृन्द यू० जी० सी० के भी आभारी हैं।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 649.
2. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 769.
3. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1975, **52**, 642.
4. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 242.
5. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1977, **20**(**3**), 223.
6. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस० तथा कौशल, आर०, **साइंस एन्ड कल्चर**, 1977, **43**, 443.
7. गुप्ता, एस० एस०, गुप्ता, कुमुद तथा कौशल, आर०, **जर्न० साइन्टीफिक रिसर्च**, 1979, **1**(**2**), 55.
8. गुप्ता, एस० एस० तथा गुप्ता, कुमुद, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1980, **23**(**1**), 65.
9. चतुर्वेदी, के० के० तथा कौशल, आर०, **रिसर्च जर्न० इन्दौर विश्वविद्यालय**, 1972, **1**(**2**), 56.
10. नाकामोटो, के०, "Infra-red Spectra of Inorganic and Coordination Compounds." जान विले एन्ड सन्स, न्यूयार्क, 1963, पृष्ठ 225 एवं 156.
11. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1978, **21**(**3**), 253.
12. गुप्ता, एस० एस०, गुप्ता, कुमुद तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1981, **24**(**2**), 99.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 3, July, 1982, Pages, 283-286

ली-बीजावली के दृष्टिकोण से दो चरों वाले लागेर बहुपदों का अध्ययन

राजेन्द्र नाथ जैन तथा महेश दुबे

गणित विभाग, होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर

[प्राप्त—30 जून, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य ब्रूरिया कॉफमेन एवं मृणाल कान्त दास द्वारा प्रयुक्त संतत रूपान्तरण ग्रुप की प्रविधि का उपयोग करते हुए दो चरों वाले लागेर बहुपदों के लिए जनक फलन प्राप्त करना है।

Abstract

On Laguerre polynomials of two variables from the view-point of Lie Algebra. *By* Rajendra Nath Jain and Mahesh Dube, Department of Mathematics, Holkar Science College, Indore.

The object of this paper is to obtain a generating function for the Laguerre polynomials of two variables using the techniques of continuous transformation groups given by Bruria Kaufman and Mrinal Kant Das.

1. दो चरों वाले लागेर बहुपदों को, ह्म्बर्ट के दो चरों के संग्रामी हाइपरज्यामितीय फलनों के रूप में, निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है [1-3]

$$\psi_2(-n, 1+\alpha, 1+\beta; x, y)=\frac{(n!)^2}{(1-\alpha)_n (1+\beta)_n} L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \tag{1.1}$$

ये बहुपद निम्न अवकल आवर्ती सम्बन्ध सन्तुष्ट करते हैं—

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)=n\,L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)-\frac{(\alpha, n)\,(\beta+n)}{n}\,L_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x, y) \tag{2·1}$$

(देखें [3])

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य संदर्भ [4, 6] में प्रयुक्त प्रविधि का उपयोग करते हुए इन बहुपदों के लिए जनक फलन प्राप्त करना है।

2. माना कि

$$F_{n,\alpha,\beta}(x,y,t)=\exp(nt).\ L_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \tag{2.1}$$

और

$$\mathscr{L}=e^{-t}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2.2}$$

तो हम देखते हैं कि

$$\mathscr{L}\ .\ F_{n,\alpha,\beta}(x,y,t)=-\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{n}F_{n-1,\alpha,\beta}(x,y,t) \tag{2.3}$$

(x, y और t) के समतल में हम पाते हैं, कि—

$$\exp(w\mathscr{L})\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(1-w\,e^{-t})^{-1} \\ y(1-w\,e^{-t})^{-1} \\ t+\log(1-we^{-t}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

इसलिए

$$\exp(w\mathscr{L})\ .\ F_{n,\alpha,\beta}(x,y,t)=\exp(nt')\ L_n^{(\alpha,\beta)}(x',y')$$

$$=(1-we^{-t})^n\ .\ e^{nt}\ L_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{1-\omega e^{-t}},\frac{y}{1-we^{-t}}\right) \tag{2.5}$$

तथा

$$\exp(w\mathscr{L})\ .\ F_{n,\alpha,\beta}(x,y,t)=e^{nt}\ .\ \sum_{m=0}^{\leqslant n}\frac{(w)^m\,e^{-mt}\,(-\alpha-n)_m\,(-\beta-n)_m}{(-n)_m}L_{n-m}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \tag{2.6}$$

अत: $t=0$ पर दोनों परिणामों से प्राप्त होता है—

$$(1-w)^n L_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{1-w},\frac{y}{1-w}\right)=\sum_{m=0}^{\leqslant u}\frac{(w)^m\,(-\alpha-n)_m(-\beta-n)_m}{(-n)_m}L_{n-m}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \tag{2.7}$$

जो द्रष्टव्य है।

जैन और दवे ने[3] सिद्ध किया है कि

$$(1-w)^{-c}\,\psi_2\left(c,\ 1+\alpha,\ 1+\beta;\ \frac{-xw}{1-w},\ \frac{-yw}{1-w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,(c)_n\,(w)^n}{(1+\alpha)_n\,(1+\beta)_n}L_n^{(\alpha,\ \beta)}(x,\ y) \quad (2.8)$$

इसमें w के स्थान पर we^t रखने पर और (2.1) का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है--

$$(1-we^t)^{-c}\psi_2\left(c,\ 1+\alpha,\ 1+\beta;\ \frac{-xwe^t}{1-we^t},\ \frac{-ywe^t}{1-we^t}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,(c)_n\,w^n}{(1+\alpha)_n\,(1+\beta)_n}\,F_{n,\ \alpha,\ \beta}\,(x,\ y,\ t) \quad (2.9)$$

(2.9) के दोनों पक्षों पर संकारक $\exp\, w\alpha$ व्यवहृत करने पर—

$$(1+w^2-we^t)^{-c}\,\psi_2\left(c,\ 1+\alpha,\ 1+\beta;\ \frac{-xwe^t}{1+w^2-we^t},\ \frac{-ywe^t}{1+w^2-we^t}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\leqslant n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)\,(c)_n\,w^{n+m}}{(1+\alpha)_n\,(1+\beta)_n\,m!}\,\mathscr{D}^m F_{n,\ \alpha,\ \beta}\,(x,\ y,\ t)$$

$$=\sum_{n=0}\sum_{m=0}^{\leqslant n}\frac{n!\,(c)_n\,w^{n+2m}\,(-\alpha-n)_m\,(-\beta-n)_m}{(1+\alpha)_n\,(1+\beta)_n\,m!\,(-n)_m}\,e^{(n-m)t}\,L_{n-m}^{(\alpha,\ \beta)}(x,\ y)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}\frac{(n+m)!\,(c)_{n+m}\,w^{n+2m}\,(-\alpha-n-m)_m\,(-\beta-n-m)_m}{(1+\alpha)_{n+m}\,(1+\beta)_{n+m}\,(-n-m)_m\,m!}e^{nt}\,.\,L_n^{(\alpha,\ \beta)}(x,\ y)$$

$$=\sum_{mn=0}\frac{(-1)^m\,n!\,(c)_{n+m}\,e^{nt}}{(1+\alpha)_n\,(1+\beta)_n\,m!}\,(w)^{n+2m}\,.\,L_n^{(\alpha,\ \beta)}(x,\ y) \quad (2.10)$$

(2.10) में e^t को $2z$ में और c को v में परिवर्तित करने पर तथा

$$(1-2zw+w^2)^{-v}=\Sigma\,C_n^{v}(z)\,w^n$$

का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है—

$$\psi_2\left(v,\ 1+\alpha,\ 1+\beta;\ \frac{-2xwz}{1-2zw+w^2},\ \frac{-2ywz}{1-2zw+w^2}\right).\,\Sigma\,C_n^{v}(z)\,.\,w^n$$

$$= \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!\, (v)_{n+m}\, w^{n+2m}\, (2z)^n\, (-\alpha-n-m)_m\, (-\beta-n-m)_m}{(1+\alpha)_{n+m}\, (1+\beta)_{n+m}\, (-n-m)_m}\, L_n^{(\alpha,\, \beta)}(x, y)$$

जबकि $C_m^v(x\ )$ गिगेनबाउर बहुपद हैं।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा कैम्प द फेरी, Fonctions Hypergeometriques at Hyperspheriques. पारी 1926.

2. डिटिकिन, वी० ए० तथा प्रूड्नीकोव्ह, ए० पी०, Operational Calculus in two Variables and its Applications. पर्गमन प्रेस.

3. जैन, आर० एन० तथा दवे, सी० के०, Simon Stevin (72-73), 129-139.

4. कॉफमेन ब्रूरिया, J. Math. Phy., 1966, **7**(3), 447-457.

5. मॅकब्राइड, ई० बी०, Obtaining Generating Functions 1971.

6. दास, एम० के०, **प्रोसी अमे० मैथ० सोसा०** 1972, **35**(2), 565-73.

7. पाराशर, बी० पी०, **प्रोसी नेश० एके० सांइस इंडिया**, 1967, **37A**, 41-48.

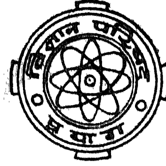
8. रेनविले, ई० डी०, Special Functions.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D.Phil., F.N. A. Sc



संशोधित मूल्य

वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 12 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 1·5 पौंड या 4 डालर

Revised Rates

Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 12
Per Vol. Rs. 3 *or* 1·5 *or* $ 4

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7, बेली एवेन्यू, प्रयाग

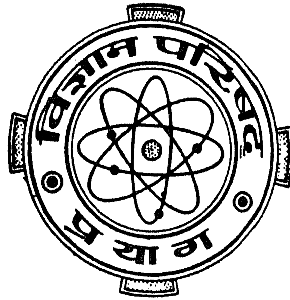
प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
82129

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 25 October 1982 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली से आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]



The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 287-299

गाँस की हाइपरज्यामितीय श्रेणी तथा सार्वीकृत H-फलन वाले कुछ परिणाम

आर० के० सक्सेना तथा जी० सी० मोदी
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जनवरी 20, 1981]

सारांश

सार्वीकृत H-फलन से सम्बद्ध गाँस की हाइपरज्यामितीय श्रेणी पर सात प्रमेयों की स्थापना की गई है। इनसे हम हाइपरज्यामितीय फलन तथा सार्वीकृत H-फलन के समाकलों का सार्वीकृत H-फलन की श्रेणी के रूप में मूल्यांकन कर सकने में समर्थ हैं।

Abstract

Some results involving Gauss's hypergeometric series and generalized H-function. *By* R. K. Saxena and G. C. Modi, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

Seven theorems on Gauss's hypergeometric series associated with generalized H-function are established which enable us to evaluate integrals of hypergeometric function and generalized H-function in the form of series of generalized H-function.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य बेली[1] तथा स्लेटर[5] द्वारा इससे पूर्व दिये गये परिणामों की सहायता से सार्वीकृत H-फलन से सम्बद्ध सात प्रमेयों की स्थापना करना है। इसमें से कुछ परिणाम श्रीवास्तव[6] के परिणाम के प्रसार स्वरूप हैं। गणितीय भौतिकी में आने वाले प्रायः समस्त विशिष्ट फलनों के परिणामों में ये फल मुख्य सूत्रों का कार्य करने वाले हैं।

सक्सेना[4] के संकेतन में मुणोत तथा कल्ला[3] द्वारा स्थापित सार्वीकृत H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है :

$$H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = H^{l,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E,[A:C],F,[B:D]} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (e,\theta) \\ (a,\alpha);(c,\gamma)^* \\ (f,\phi) \\ (b,\beta);(d,\delta) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} x_1(s)\, x_2(t)\, x_3(t+s)\, x^{-s}\, y^{-t}\, ds dt \tag{1.1}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई के रूप में विवेचित किया जाता है और

$$x_1(s) = \frac{\prod_1^{m_1} \Gamma(b_j+\beta_j s) \prod_1^{n_1} \Gamma(1-a_j-\alpha_j s)}{\prod_{m_1+1}^{B} \Gamma(1-b_j-\beta_j s) \prod_{n_1+1}^{A} \Gamma(a_j+\alpha_j s)},$$

$$x_2(t) = \frac{\prod_1^{m_2} \Gamma(d_j+\delta_j t) \prod_1^{n_2} \Gamma(1-c_j-\gamma_j t)}{\prod_{m_2+1}^{D} \Gamma(1-d_j-\delta_j t) \prod_{n_2+1}^{C} \Gamma(c_j+\gamma_j t)},$$

तथा $$x_3(u) = \frac{\prod_1^{l} \Gamma(e_j-u\theta_j)}{\prod_{l+1}^{E} \Gamma(1-e_j+u\theta_j) \prod_1^{F} \Gamma(f_j-u\theta_j)}.$$

निम्नलिखित सरलीकृत कल्पनाएं भी की जाती हैं :

(i) $0 \leqslant n_1 \leqslant A$, $1 \leqslant m_1 \leqslant B$, $0 \leqslant n_2 \leqslant C$, $1 \leqslant m_2 \leqslant D$, $0 \leqslant l \leqslant E$.

(ii) l, m_1, n_1, m_2, n_2, A, B, C, D, E तथा F अनृण संख्याएं हैं।

(iii) समाकल्य के सभी पोल सरल हैं।

* (c, γ) से $(c_1, \gamma_1), (c_2, \gamma_2), \ldots, (c_C, \gamma_C)$ सूचित होता है।

(iv) समस्त $a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ तथा ϕ वास्तविक हैं एवं समस्त $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ तथा ϕ धनात्मक हैं।

(v) समाकल (1.1) अभिसारी होता है यदि

$$\omega_1 \equiv \sum_1^E \theta_j - \sum_1^B \beta_j - \sum_1^F \phi_j + \sum_1^A \alpha_j \leqslant 0,\ \omega_2 \equiv \sum_1^E \theta_j - \sum_1^D \delta_j - \sum_1^F \phi_j + \sum_1^C \gamma_j \leqslant 0.$$

$$|\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ \ |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2}$$

जहाँ $$\varphi_1 \equiv \sum_1^{m_1} \beta_j - \sum_{m_1+1}^{B} \beta_j + \sum_1^{n_1} \alpha_j - \sum_{n_1+1}^{A} \alpha_j + \sum_1^{l} \theta_j - \sum_{l+1}^{E} \theta_j - \sum_1^{F} \phi_j > 0,$$

तथा $$\varphi_2 \equiv \sum_1^{m_2} \delta_j - \sum_{m_2+1}^{D} \delta_j + \sum_1^{n_2} \gamma_j - \sum_{n_2+1}^{C} \gamma_j + \sum_1^{l} \theta_j - \sum_{l+1}^{E} \theta_j - \sum_1^{F} \phi_j > 0.$$

आगे के विश्लेषण में निम्नलिखित समाकल की आवश्यकता होगी :

$$\int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\sigma-1} H\begin{bmatrix} ux^{\mu} \\ vx^{\mu} \end{bmatrix} dx$$

$$= \Gamma(\sigma)\ H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (\rho, \mu), (e, \theta) \\ u & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ v & (\rho+\sigma, \mu)\ (f, \phi) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{1.2}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0;\ R(\sigma) > 0;\ \varphi_1,\ \ \varphi_2 > 0;\ |\arg u| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ \ |\arg v| < \frac{\pi\varphi_2}{2}$

$$R\left(\rho + \mu \frac{b_i}{\beta_i} + \mu \frac{d_j}{\delta_j}\right) > 0,\ i = 1, \ldots, m_1;\ j = 1, 2, \ldots, m_2,$$

जिसे बीटा फलन सूत्र[2] के द्वारा स्थापित किया जा सकता है।

2. प्रमेय :

अब हम निम्नलिखित प्रमेयों की स्थापना करेंगे।

प्रमेय 1 : यदि

$$(1-z)^{\xi+\eta-\zeta}\ {}_2F_1\ (2\xi, 2\eta; 2\zeta; z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r, \tag{2.1}$$

तो $$\int_0^1 {}_2F_1(\xi, \eta, \zeta+\tfrac{1}{2}; z)\, {}_2F_1(\zeta-\xi, \zeta-\eta; \zeta+\tfrac{1}{2}; z)\, H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta)_r A_r}{(\zeta+\frac{1}{2})_r} H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (r+2, \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{2.2}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0; \varphi_1, \varphi_2 > 0; |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2}, |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2};$

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0, i=1, \ldots, m_1; j=1, \ldots, m_2.$$

प्रमेय 2 : यदि

$$ {}_2F_1(\xi, \eta; \zeta_1; z)\, {}_2F_1(\xi, \eta; \zeta_2; z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r z^r \tag{2.3}$$

तो $$\int_0^1 {}_4F_3\left[\xi, \eta, \frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}, \frac{\zeta_1+\eta-1}{2}; \xi+\eta, \zeta_1, \zeta_2: 4z(1-z)\right] H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta_1+\zeta_2-1)_r B_r}{(\xi+\eta)_r} H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (r+2, \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{2.4}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0; \varphi_1, \varphi_2 > 0; |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2}, |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2};$

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0, i=1, \ldots, m_1; j=1, \ldots, m_2.$$

प्रमेय 3 : यदि

$$ {}_2F_1(\xi, \eta_1; \zeta; z)\, {}_2F_1(\xi, \eta_2; \zeta; z) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r z^r, \tag{2.5}$$

तो $$\int_0^1 (1-z)^{-\xi}\, {}_4F_3\left[\xi, \eta_1, \eta_2, \zeta-\xi; \frac{\eta_1+\eta_2}{2}, \frac{\eta_1+\eta_2+1}{2}, \zeta; \frac{-z^2}{4(1-z)}\right] H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{bmatrix} dz$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\zeta)_r\, C_r}{(\eta_1+\eta_2)_r}\, H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]}\left[\begin{array}{c|l} & (r+1f\ \mu),\ (c,\ \theta)\\ x & (a,\ \alpha);\ (c,\ \gamma)\\ y & (f,\ \phi),\ (r+2,\mu)\\ & (b,\ \beta);\ (d,\ \delta)\end{array}\right] \qquad (2.6)$$

जहाँ $\omega_1,\ \omega_2 \leqslant 0;\ \varphi_1,\ \varphi_2>0;\ |\arg x| <\frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg y| <\frac{\pi\varphi_2}{2},$

$$R\ \left(1+\mu\ \frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0,\ i=1,\ \ldots,\ m_1;\ j=1,\ \ldots,\ m_2.$$

प्रमेय 4 : यदि

$$\zeta_1+\zeta_2=\xi_1+\eta_1+\xi_2+\eta_2$$

तथा $${}_2F_1\ (\xi_1,\ \eta_1;\ \zeta_1;\ z)\ {}_2F_1\ (\xi_2,\ \eta_2;\ \zeta_2;\ z)=\sum_{r=0}^{\infty} D_r z^r, \qquad (2.7)$$

तो $$\int_0^1 (1-z)^{-\zeta_1-\zeta_2+1}\ {}_4F_3\left[\xi_1,\ \zeta_1-\eta_1,\ \frac{\zeta_1}{2}\frac{\zeta_2}{2},\ \frac{\zeta_1+\zeta_2-1}{2}\xi_1+\xi_2,\ \eta_1+\eta_2,\ \zeta_1;\ \frac{-4z}{(1-z)^2}\right]$$

$$\times H\begin{bmatrix}xz^{\mu}\\ yz^{\mu}\end{bmatrix}dz$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\zeta_2)_r\ (\zeta_1+\zeta_2-1)_r\ D_r}{(\xi_1+\xi_2)_r\ (\xi_1+\eta_2)_r}\ H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]}\left[\begin{array}{c|l} & (r+1,\ \mu).\ (e,\ \theta)\\ x & (a,\ \alpha);\ (c,\ \gamma)\\ y & (f,\ \phi),\ (2+r,\ \mu)\\ & (b,\ \beta);\ (d,\ \delta)\end{array}\right], \qquad (2.8)$$

जहाँ $\varphi_1,\ \varphi_2>0;\ \omega_1,\ \omega_2\leqslant 0;\ |\arg x| <\frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg y| <\frac{\pi\varphi_2}{2},$

$$R\left(1+\mu\ \frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0,\ i=1,\ \ldots,\ m_1;\ j=1,\ \ldots,\ m_2.$$

प्रमेय 5 : यदि

$$(1-z)^{\xi+\eta-\zeta-1/2}\ {}_3F_2\ (2\xi,\ 2\eta,\ \zeta;\ 2\zeta,\ \xi+\eta+\tfrac{1}{2};\ z)=\sum_{r=0}^{\infty} E_r\ z^r, \qquad (2.9)$$

तो $\int_0^1 {}_2F_1(\xi, \eta; \xi+\eta+\frac{1}{2}; z)\, {}_2F_1(\frac{1}{2}+\zeta-\eta, \frac{1}{2}+\zeta-\xi; 2\zeta-\eta-\xi+\frac{1}{2}; z)\; H\left[\begin{matrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{matrix}\right] dz$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta+\frac{1}{2})_r\, E_r}{(2\zeta-\xi-\eta+\frac{1}{2})_r} H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{matrix} x \\ \\ q \end{matrix} \left| \begin{matrix} (r+1, \mu), (e, \theta) \\ (a, \alpha); (c, \gamma) \\ (f, \phi), (r+2, \mu) \\ (b, \beta); (d, \delta) \end{matrix} \right.\right], \tag{2.10}$$

जहाँ $\varphi_1, \varphi_2 > 0;\ \omega_1, \omega_2 \leqslant 0;\ |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg y| < \frac{\pi\varphi_1}{2};$

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right) > 0,\ i=1, \ldots, m_1;\ j=1, \ldots, m_2.$$

प्रमेय 6 : यदि

$$(1-z)^{\xi+\eta-\zeta}\, {}_3F_2\,[2\xi, 2\eta, \zeta+\tfrac{1}{2}; 2\zeta, \xi+\eta+\tfrac{1}{2}; z] = \sum_{r=0}^{\infty} F_r z^r, \tag{2.11}$$

तो $\int_0^1 {}_2F_1(\xi, \eta; \xi+\eta+\frac{1}{2}; z)\, {}_2F_1(\zeta-\xi, \zeta-\eta; 2\zeta-\eta-\xi+\frac{1}{2}; z)\; H\left[\begin{matrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{matrix}\right] dz$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta)_r\, F_r}{(2\zeta-\xi-\eta+\frac{1}{2})_r} H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix} \left| \begin{matrix} (r+1, \mu), (e, \theta) \\ (a, \alpha); (c, \gamma) \\ (f, \phi), (r+2, \mu) \\ (b, \beta); (d, \delta) \end{matrix} \right.\right], \tag{2.12}$$

जहाँ $\varphi_1, \varphi_2 > 0;\ \omega_1, \omega_2 \leqslant 0;\ |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2};$

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right) > 0;\ i=1, \ldots, m_1;\ j=1, \ldots, m_2.$$

प्रमेय 7 : यदि

$$(1-z)^{\xi+\eta-\zeta-1/2}\, {}_2F_1\,(2\xi-1, 2\eta; 2\zeta-1; z) = \sum_{r=0}^{\infty} G_r z^r, \tag{2.13}$$

तो $$\int_0^1 {}_2F_1(\xi, \eta; \zeta; z)\, {}_2F_1(\zeta-\xi+\tfrac{1}{2}, \zeta-\eta-\tfrac{1}{2}; \zeta; z)\; H\left[\begin{matrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{matrix}\right] dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\frac{1}{2})_r}{(\zeta)_r} G_r \; H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|c} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (r+2, \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \quad (2.14)$$

जहाँ $\varphi_1, \varphi_2 > 0; \omega_1 \, \omega_2 \leqslant 0; |\arg x| < \frac{\pi \varphi_1}{2}, |\arg y| < \frac{\pi \varphi^2}{2};$

$$R\left(1+\mu \frac{b_i}{\beta_i} + \mu \frac{d_j}{\delta_j}\right) > 0, \; i=1, \ldots, m_1; j=1, \ldots, m_2.$$

उपपत्ति : बेली[1] के अनुसार हमें ज्ञात है कि

$${}_2F_1\,(\xi, \eta; \zeta+\tfrac{1}{2}; z)\; {}_2F_1\,(\zeta-\xi, \zeta-\eta; \zeta+\tfrac{1}{2}; z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta)_r \, A_r \, z^r}{(\zeta+\frac{1}{2})_r} \quad (2.15)$$

(2.15) में $H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{bmatrix}$ से गुणा करने तथा z के प्रति 0 से 1 तक समाकलित करने पर

$$\int_0^1 {}_2F_1\,(\xi, \eta; \zeta+\tfrac{1}{2}; z)\; {}_2F_1\,(\zeta-\xi, \zeta-\eta; \zeta+\tfrac{1}{2}; z)\; H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{bmatrix} dz$$

$$= \int_0^1 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta)_r \, z^r}{(\zeta+\frac{1}{2})_r} A_r \; H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{bmatrix} dz \quad (2.19)$$

(2.16) में समाकलन तथा संकलन के क्रम को विनिमय करने पर तथा (1.2) के बल पर समाकल का मान निकालने पर हमें प्रमेय 1 प्राप्त होती है ।

शेष 2 से 7 तक प्रमेयों की उपपत्तियां भी ज्ञात फलों[1, 5] के उपयोग द्वारा इसी तरह प्राप्त की जा सकती हैं ।

3. विशिष्ट दशाएँ

निम्नलिखित परिणाम पिछले अनुभाग में दिये गये परिणामों से सुगमता से निकलते हैं और वे क्रमशः (2.2); (2.4), (2.6), (2.8), (2.10), (2.12) एवं (2.14) में दिये गये परिणामों के साथ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत लागू होते हैं

$$\int_0^1 {}_2F_1\,(\xi, \eta; \xi+\tfrac{1}{2}; z)\; H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\xi)_r (\eta)_r}{(\xi+\frac{1}{2})_r \Gamma(r+1)} H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (2+r, \mu) \\ & (b. \beta); (d, \delta) \end{array} \right], \tag{3.1}$$

$$\int_0^1 {}_2F_1 [\xi, \zeta_1-\tfrac{1}{2}; \xi+\zeta_1; 4z(1-z)] \; H\left[\begin{matrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{matrix}\right] dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\zeta_1-1)_r (2\xi)_r}{(\xi+\zeta_1)_r \Gamma(1+r)} H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (2+r, \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{3.2}$$

$$\int_0^1 (1-z)^{-\xi} {}_2F_1 \left[\xi, \xi-\xi; \zeta-\tfrac{1}{2}; \frac{-z^2}{4(1-z)}\right] H\left[\begin{matrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{matrix}\right] dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta)_r (2\xi_r}{(2\zeta)_r \Gamma(r+1)} H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (1+r, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (2+r, \mu) \\ & (b, \beta): (d, \delta) \end{array} \right] \tag{3.3}$$

$$\int_0^1 (1-z)^{1-\zeta_1-\zeta_2} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \zeta_1-\eta_1, & \frac{\zeta_1+\zeta_2}{2} & \frac{\zeta_1+\zeta_2-1}{2} & \\ \zeta_1+\xi_2 & \eta_1+\zeta_2; & & \frac{4z}{(1-z)^2} \end{matrix} \right] H\left[\begin{matrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu} \end{matrix}\right] dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta_2)_r (\zeta_1+\zeta_2-1)_r (\eta_1+\xi_2)_r}{(\zeta_1+\xi_2)_r (\zeta_1+\zeta_2)_r \Gamma(r+1)}$$

$$\times H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (2+r, \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{3.4}$$

$$\int_0^1 {}_2F_1\left(\zeta+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}+\zeta-\eta; 2\zeta-\eta+\tfrac{1}{2}; z\right) H\begin{bmatrix} xz^\mu \\ yz^\mu \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta+\frac{1}{2})_r (\zeta-\eta+\frac{1}{2})_r}{(2\zeta-\eta+\frac{1}{2})_r \Gamma(r+1)} H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (2+r, \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 {}_2F_1\left(\zeta, \zeta-\eta; 2\zeta-\eta+\tfrac{1}{2}; z\right) H\begin{bmatrix} xz^\mu \\ yz^\mu \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta_1-\eta)_r (\zeta)_r}{(2\zeta-\eta+\frac{1}{2})_r \Gamma(r+1)} H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (2+r; \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{3.6}$$

$$\int_0^1 (1-z)^{-\eta} {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \zeta-\eta-\tfrac{1}{2}; \zeta; z\right) H\begin{bmatrix} xz^\mu \\ yz^\mu \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\frac{1}{2})_r (\eta+\frac{1}{2})_r}{(\zeta)_r \Gamma(r+1)} H^{l+1, n_1, n_2, m_1, m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (1+r, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (f, \phi), (2+r, \mu) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \tag{3.7}$$

यदि हम (3.1) में $\xi+\frac{1}{2}=\eta$ तथा $\xi=-n$ (एक अनृण संख्या) रखें, (3.2) तथा (3.3) में $\xi=-n$ रखें, (3.4) में $\xi_2+\eta=-n$, (3.5) में $\zeta-\eta+\frac{1}{2}=-n$, (3.6) में $\zeta=-n$ तथा (3.7) में $\eta+\frac{1}{2}=-n$ रखें तो समाकल (1.2) के बल पर हमें निम्नलिखित प्रसार सूत्र तथा साथ ही सार्वीकृत H-फलन के लिए समाकल प्राप्त होते हैं।

$$\Gamma(n+1) H^{l+1, n_1, n_2, m_1 m_2}_{E+1, [A:C], F+1, [B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (1, \mu), (e, \theta) \\ x & (a, \alpha); (c, \gamma) \\ y & (2+n, \mu), (f, \phi) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n)_r}{\Gamma(r+1)} H^{l+1:n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1,\mu),(e,\theta) \\ x & (a,\alpha);(c,\gamma) \\ y & (f,\phi),(2+r,\mu) \\ & (b,\beta);(d,\delta) \end{array} \right], \tag{3.8}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0; \varphi_1, \varphi_2 > 0; |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2}, |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2};$

$$(n+1)>0; \quad R\left(1+\mu \frac{b_i}{\beta_i}+\mu \frac{d_j}{\delta_j}\right)>0; i=1, \ldots, m_1; j=1, \ldots, m_2,$$

$$\int_0^1 {}_2F_1 [-n, \zeta_1-\tfrac{1}{2}; -n+\zeta_1; 4z(1-z)] \, H\begin{bmatrix} xz^\mu \\ yz^\mu \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{2n} \frac{(2\zeta_1-1)_r (-2n)_r}{(-n+\zeta_1)_r \Gamma(r+1)} H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1,\mu),(e,\theta) \\ x & (a,\alpha);(c,\gamma) \\ y & (f,\phi),(2+r,\mu) \\ & (b,\beta),(d,\delta) \end{array} \right], \tag{3.9}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0; \varphi_1, \varphi_2 > 0; |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2}, |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2},$

$$R\left(1+\mu \frac{b_i}{\beta_i}+\mu \frac{d_j}{\delta_j}\right)>0, i=1, \ldots, m_1; j=1, \ldots, m_2.$$

$$\int_0^1 (1-z)^n {}_2F_1 \left[-n, \zeta+n; \zeta-\tfrac{1}{2}; \frac{-z^2}{4(1-z)}\right] H\begin{bmatrix} xz^\mu \\ yz^\mu \end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{2n} \frac{(\zeta)_r (-2n)_r}{(2\zeta)_r \Gamma(r+1)} H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]} \left[\begin{array}{c|l} & (r+1,\mu),(e,\theta) \\ x & (a,\alpha);(c,\gamma) \\ y & (f,\phi),(2+r,\mu) \\ & (b,\beta);(d,\delta) \end{array} \right], \tag{3.10}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0; \varphi_1, \varphi_2 > 0; |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2}, |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2},$

$$R\left(1+\mu \frac{b_i}{\beta_i}+\mu \frac{d_j}{\delta_j}\right)>0; i=1, \ldots, m_1; j=1, \ldots, m_2.$$

$$\int_0^1 (1-z)^{1-\zeta_1-\zeta_2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\zeta_1-\eta_1, & \dfrac{\zeta_1+\zeta_2}{2}, & \dfrac{\zeta_1+\zeta_2-1}{2}; \\ \zeta_1-\eta_1-n, & \eta_1+\zeta_2; & \dfrac{-4z}{(1-z)^2}\end{matrix}\right] \times H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu}\end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(\zeta_2)_r\,(\zeta_1+\zeta_2-1)_r\,(-n)_r}{(\zeta_1-n-\eta)_r\,(\zeta_1+\zeta_2)_r\,\Gamma(r+1)}$$

$$\times H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]}\left[\begin{matrix} \\ x \\ y \\ \end{matrix}\middle|\begin{matrix}(r+1,\mu),(e,\theta) \\ (a,\alpha);(c,\gamma) \\ (f,\phi),(2+r,\mu) \\ (b,\beta);(d,\delta)\end{matrix}\right], \tag{3.11}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0$: $\varphi_1, \varphi_2 > 0$; $|\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2}$, $|\arg y| < \frac{\pi\varphi_9}{2}$;

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0;\ i=1,\ldots,m_1;\ j=1,\ldots,m_2.$$

$$\int_0^1 {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+\zeta, -n; \zeta-n; z\right) H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu}\end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(\zeta+\frac{1}{2})_r\,(-n)_r}{(\zeta-n)_r\,\Gamma(r+1)}\, H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]}\left[\begin{matrix} \\ x \\ y \\ \end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1+r,\mu),(e,\theta) \\ (a,\alpha):(c,\gamma) \\ (f,\phi);(2+r,\mu) \\ (b,\beta);(d,\delta)\end{matrix}\right], \tag{3.12}$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0$; $\varphi_1, \varphi_2 > 0$; $|\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2}$, $|\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2}$;

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0;\ i=1,\ldots,m_1;\ j=1,\ldots,m_2.$$

$$\int_0^1 {}_2F_1\left(\zeta, -n; \zeta-n+\tfrac{1}{2}; z\right) H\begin{bmatrix} xz^{\mu} \\ yz^{\mu}\end{bmatrix} dz$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n)_r\,(\zeta)_r}{(\zeta-n+\frac{1}{2})_r\,\Gamma(r+1)}\, H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C]F+1,[B:D]}\left[\begin{array}{c|l} & (1+r,\mu),(e,\theta)\\ x & (a,\alpha);(c,\gamma)\\ y & (f,\phi),(r+2,\mu)\\ & (b,\beta);(d,\delta)\end{array}\right], \quad (3.13)$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0;\ \varphi_1, \varphi_2 > 0;\ |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2};$

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0;\ j=1,\ldots,m_2,\ i=1,\ldots,m_1.$$

$$\int_0^1 (1-z)^{+n+1/2}\, {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\zeta+n;\zeta;z\right) H\left[\begin{matrix} xz^{\mu}\\ yz^{\mu}\end{matrix}\right]dz$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(\zeta-\frac{1}{2})_r\,(-n)_r}{(\zeta)_r\,\Gamma(r+1)}\, H^{l+1,n_1,n_2,m_1,m_2}_{E+1,[A:C],F+1,[B:D]}\left[\begin{array}{c|l} & (r+1,\mu),(e,\theta)\\ x & (a,\alpha);(c,\gamma)\\ y & (f,\phi),(r+2,\mu)\\ & (b,\beta);(d.\,\delta)\end{array}\right] \quad (3.14)$$

जहाँ $\omega_1, \omega_2 \leqslant 0;\ \varphi_1, \varphi_2 > 0;\ |\arg x| < \frac{\pi\varphi_1}{2},\ |\arg y| < \frac{\pi\varphi_2}{2};$

$$R\left(1+\mu\frac{b_i}{\beta_i}+\mu\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0;\ i=1,\ldots,m_1, j=1,\ldots,m_2.$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो० आर० एस० कुशवाहा के आभारी हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में प्रोत्साहन दिया।

निर्देश

1. बेली, डब्लू० एन० Generalized Hypergeometric Series, स्टेकर्ट-हैफनर सर्विस एजेन्सी, न्यूयार्क, 1964.

2. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, भाग 1, मकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.

3. मुणोत, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. 1971, **A21**, 67-84.

4. सक्सेना, आर० के०, वही, पृ० 185-191.

5. स्लेटर, एल० जे०, Generalized Hypergeometric function, मकाग्राहिल, नई दिल्ली, 1966.

6. श्रीवास्तव, ए०, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1971, **35**, 235-40.

7. ब्रामविच, टी० जे० आई० ए०, An Introduction to the Theory of Infinite Series, मकमिलन, न्यूयार्क, 1949.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 301-305

F_1 रूपी बहुपद के जनक फलन

जी० एन० चांदवानी
बुढा पाड़ा, कोयला बाड़ा, रायपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—सितम्बर 12, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में मनोचा द्वारा अध्ययन किये गये F_1 रूप वाले बहुपद के समुच्चय के रूडिग्र सूत्र के अनुरूप तथा द्विरेखीय जनकफलन सूचित किये गये हैं।

Abstract

Generating functions of the polynomial of the form F_1. *By* G. N. Chandwani, Budha Para, Koyla Badha, Raipur (M. P.).

This note records analogues of Rodrigue's formula and bilinear generating functions of a set of "A polynomial of the form F_1" studied by Manocha. Specialisation of parameter yi elds known result.

1. प्रस्तावना

मनोचा[2] ने बहुपद समुच्चय

$$Sn\ (\alpha, \beta, \gamma, x, y)=\frac{(\alpha)n}{n!}\, F_1\ (-n; \beta, \gamma; \alpha; x, y), \tag{1.1}$$

का अध्ययन किया है जहाँ F_1 ऐपेल के फलनों में से एक है जिसे

$$F_1\ (\alpha; \beta_1, \beta_2, \beta_3; x, y)=\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)m+n\,(\beta_1)m\ (\beta_2)n}{(\beta_3)m+n.\ m!\ n!} x^m\, y_n \tag{1.2}$$

के रूप में परिभाषित किया गया है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य रूडिग्र सूत्र के अनुरूप तथा इस बहुपद-समुच्चय के द्विरेखीय जनकफलनों की सूचना देना है।

हम अपने अन्वेषण में कुछ ज्ञात फलों का उपयोग करेंगे।

I. मनोचा[2] का सम्बन्ध (3) इस प्रकार :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)m}{(\alpha)n} Sn\ (\alpha, \beta, \gamma, x, y)\ t^n = (1-t)^{-\lambda}\ F_1 \left(\lambda; \beta, \gamma; \alpha, \frac{-xt}{1-t}, \frac{-yt}{1-t}\right). \quad (1.3)$$

और सम्बन्ध (10) है :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} S_{n+k}\ (\alpha, \beta, \gamma, x, y)\ t^n$$

$$=(1-t)^{\beta+\gamma-\alpha-k}\ (1-t+x\,t)^{-\beta}\ (1-t+yt)^{-\gamma}$$

$$\times S_k \left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{1-t+xt}, \frac{y}{1-t+yt}\right) \quad (1.4)$$

क्रमगुणित फलन की परिभाषा से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि

$$(a)_p\ (a+p)_q = (a)_{p+q} \quad (1.5)$$

$$(-n)_r = \frac{(-1)^r\ n!}{(n-r)\ !} \quad (1.6)$$

2. इस अनुभाग में निम्नलिखित फल की स्थापना करेंगे।

रूडिग्र सूत्र के अनुरूप

$$Sn\ (\alpha, \beta_1, \beta_2, x, y)$$

$$= \frac{(-1)^n\ x^{1-\beta_1+n}\ (\alpha)^n}{(1-\beta_1)_n\ n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [x^{\beta_1-1}\ F_1\ (-n;\ \beta_1-n,\ \beta_2;\ \alpha;\ x, y)] \quad (2.1)$$

$$Sn\ (\alpha, \beta_1, \beta_2, x, y)$$

$$= \frac{(-1)^n\ y^{1-\beta_2+n}\ (\alpha)_n}{(1-\beta_2)_n\ n!} \left(\frac{d}{dy}\right)^n [y^{\beta_2-1}\ F_1(-n,\ \beta_1,\ \beta_2-n;\ \alpha;\ x, y)] \quad (2.2)$$

II. द्विरेखीय जनक फलन

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\ (\alpha, \beta_1, \beta_2, x, y)\ F_2\ (a, -n, b, \alpha, d; u, z)\ t^n$$

$$=(1-t)^{\beta_1+\beta_2+a-\alpha}(1-t+ut)^{-\alpha}(1-t+xt)^{-\beta_1}(1-t+yt)^{-\beta_2}$$

$$\times F_G\left(a, a, a; b, \beta_1, \beta_2; d, \alpha, \alpha; \frac{x\,ut}{1-t+ut}, \frac{y\,ut}{1-t+zt}, \frac{z(1-t)}{1-t+zt}\right)$$

3. उपपत्तियां

(2.1) की उपपत्ति

(2.1) का दक्षिण पक्ष

$$=\frac{(-1)^n x^{1-\beta_1+n}}{(1-\beta_1)_n}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{x\,\beta_1^{-1}(\alpha)_n}{n!}F_1(-n, \beta_1-n, \beta_2; \alpha, x, y)$$

$$=\frac{(-1)^n x^{1-\beta_1+n}}{(1-\beta_1)_n}D_x^n \frac{(\alpha)_n}{n!}\sum_{p+q\leqslant n}\frac{(-1)_{p+q}(\beta_1-n)_p(\beta_2)_q}{p!\,q!\,(\alpha)_{p+q}}x^{p+\beta_1-1}y^q$$

$$=\frac{(-1)^n x^{1-\beta_1+n}(\alpha)_n}{(1-\beta_1)_n\,n!}\sum_{p+q\leqslant n}\frac{(-n)_{p+q}(\beta_2)_q}{p!\,q!\,(\alpha)_{p+q}}\frac{(p+\beta_1)!}{(\beta_1-n)!}x^{p+\beta_1\,1-n}y^q$$

$$=\frac{(\alpha)_n(-1)^n}{n!\,(1-\beta_1)_n}\sum_{p+q\leqslant n}\frac{(-n)_{p+q}(\beta_1-n)_{n+p}(\beta_2)_q\,x^p y^q}{p!\,y!\,(\alpha)_{p+q}}$$

अब $(\beta_1-n)_{n+p}=(\beta_1-n)_n(\beta_1)_p=(-1)^n(1-\beta_1)_n(\beta_1)_p$

का प्रयोग करने पर

$$=\frac{(\alpha)_n}{n!}\sum_{p+q\leqslant n}\frac{(-n)_{p+q}(\beta_1)_p(\beta_2)_q\,x^p y^q}{p!\,q!\,(\alpha)_{p+q}\,p!\,q!}$$

=वाम पक्ष

इसी प्रकार हम (2.2) की उपपत्ति दे सकते हैं।

(2.3) की उपपत्ति

वाम पक्ष $=\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\alpha, \beta_1, \beta_2, x, y)\,F_2(a; -n, b; \alpha; d; u, z)\,t^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(a)_{p+q}(-n)_p(b)_q}{(\alpha)_p(d)_q\,p!\,q!}u^p z^q t^n S_n(\alpha, \beta_1, \beta_2, x, y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a)_{p+q}\,(b)_q}{(\alpha)_p\,(d)_q\,q!} \binom{n+p}{p} (-ut)^p z^q t^n S_{n+p}$$

$$(\alpha, \beta_1, \beta_2, x, y)\, t^n$$

$$= \sum_{p,\,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{p+q}\,(b)_q}{(\alpha)_p\,(d)_q\,q!} z^q (ut)^p (1-t)^{\beta_1+\beta_2-\alpha-p} (1-t+xt)^{-\beta_1} (1-t+yt)^{-\beta_2}$$

$$\times S_p\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{x}{1-t-xt}, \frac{y}{1-t+yt}\right) \quad [(1\cdot4) \text{ के प्रयोग से}]$$

$$= (1-t)^{\beta_1+\beta_2-\alpha} (1-t+xt)^{-\beta_1} (1-t+yt)^{-\beta_2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a)_q\,(b)_q}{a!\,(d)_q} Z^q$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a+q)^p}{(x)_p} S_p\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{x}{1-t+xt}, \frac{y}{1-t-yt}\right)\left(\frac{-ut}{1-t}\right)^p$$

$$= (1-t)^{\beta_1+\beta_2-\alpha} (1-t+xt)^{-\beta_1} (1-t+yt)^{-\beta_2}$$

$$\times \sum \frac{(a)_q\,(b)_q}{(d)_p\,q!} Z^q \left(1+\frac{ut}{1-t}\right)^{-a-q} F_1\left(a+q, \beta_1; \beta_2, \alpha; \frac{x\,ut}{(1-t-at)(1-t+xt)}\right.$$

$$\left.\times \frac{y\,ut}{(1-t+ut)(1-t+yt)}\right) \quad [(1\cdot3) \text{ से}]$$

$$= (1-t)^{\beta_1+\beta_2+a-\alpha} (1-t+xt)^{-\beta_1} (1-t+yt)^{-\beta_2}$$

$$\times \sum_{p,\,q\,r=0}^{\infty} \frac{(a)_{p+q+r}\,(\beta_1)_p\,(b)_q\,(\beta_2)_r}{(d)_q\,(\alpha)_{p+r}\,p!\,q!\,r!} \left(\frac{x\,ut}{(1-t+ut)(1-t+xt)}\right)^p$$

$$\times \left(\frac{y\,ut}{(1-t+ut)(1-t+yt)}\right)^r \left(\frac{(1-t)\,z}{1-t+ut}\right)^q$$

= दक्षिण पक्ष

विशिष्ट दशाएँ

(2.3) में $u=0$ मानने और β_1 तथा β_2 को क्रमशः β तथा γ के द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\alpha, \beta, \gamma, x, y)\; {}_2F_1(-n, \lambda, \alpha, z)\, t^n$$

$$=(1-t)^{\lambda+\beta-\alpha}(1-t+xt)^{-\beta_1}(1-t+yt)^{-\beta_2}(1-t+zt)^{-\lambda}$$

$$F_1\left(\lambda;\beta;\gamma;\alpha;\frac{x\,zt}{(1-t+xt)(1-t+zt)},\frac{y\,zt}{(1-t+xt)(1-t+zt)}\right)$$

जो एक ज्ञात फल है।[2]

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Function. भाग 1, मकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.
2. मनोचा, एच० एल०, Rev. Mat. Univ. Parma, 8, 143-48.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages, 307-310

होल्डर की असमिका तथा त्रुटि फलन

वी० एल० एन० शर्मा तथा हरिदत्त पाण्डेय
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—जून 10, 1982]

सारांश

यह प्रेक्षण कि फलन exp $(-t^2)$ तथा exp $(-2xt)$ $(x>0)$ समस्त $p>0$ के लिए $L^p(0, \infty)$ में हैं, सम्भव बना देता है कि उनके द्वारा तुष्ट 'सर्वोत्तम' होल्डर असमिका का चयन किया जाय। p का संगत सर्वोत्तम मान x के सरल फलन के रूप में पाया जाता है। इस विधि से erf (x) की निम्नतर सीमा प्राप्त होती है जिसमें अधिकतम आपेक्षिक त्रुटि लगभग 0.04 है।

Abstract

Holder's inequality and the error function. *By* V. L. N. Sarma and Hari Datta Pandey, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

The observation that the functions exp $(-t^2)$ and exp $(-2xt)$ $(x>0)$ are in $L^p(0, \infty)$ for all $p>0$, makes it possible to choose the "best" Holder inequality satisfied by them. The corresponding best value of p turns out to be a rather simple function of x. The method yields a lower bound for erf(x), with a maximum relative error of about 0.04.

त्रुटि फलन[2] जिसे

$$\text{erf}\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}E(x)$$

द्वारा परिभाषित किया है जहाँ

$$E(x)=\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt \quad (0<x<\infty) \tag{1}$$

गणित की कई शाखाओं में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। होल्डर की असमिका का सम्प्रयोग करने से $E(x)$ का रोचक मूल्यांकन होता है अतः $f(x)$ का भी। सिद्धान्त रूप में, इस शोधपत्र में दी गई विधि का सम्प्रयोग अन्य कई फलनों के लिए किया जा सकता है किन्तु इसमें अत्यधिक बीजगणित प्रवेश कर जाती है।

(1) में $t=u+x$ रखने पर हम देखते हैं कि

$$E(x)=e^{-x^2}\int_0^\infty f(u)\, g_x(u)\, du=e^{-x^2}\, F(x)$$

जहाँ $F(x)$ को उपर्युक्त समाकल के मान के रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$f(u)=e^{-u^2} \text{ तथा } g_x(u)=e^{-2xu}\ (x>0).$$

प्रत्येक $p>0$, के लिए फलन f तथा g_x $L^p(0, \infty)$ में रहते हैं। वास्तव में

$$||f||=\left(\frac{\pi}{4p}\right)^{1/2p}, \quad ||g_x||_p=\left(\frac{1}{2xp}\right)^{1/p},$$

$$||f||_\infty=1=\lim_{p\to\infty} ||f||_p, \quad ||g_x||_\infty=1=\lim_{p\to\infty} ||g_x||_p. \tag{2}$$

तो होल्डर की असमिका[1] से हमें

$$F(x)=|F(x)|\leqslant||f||_p\,||g_x||_{p'},\ (1<p<\infty;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$$

$$=\left(\frac{\pi}{4p}\right)^{1/2p}\left[\frac{1}{2x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]^{(1-1/p)}. \tag{3a}$$

प्राप्त होता है। इसके साथ ही हमें प्रारम्भिक असमिकाएँ

$$F(x)\leqslant\begin{cases}||f||_1\,||g_x||_\infty=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} & (3b)\\ ||f||_\infty\,||g_x||_1=\dfrac{1}{2x}. & (3c)\end{cases}$$

प्राप्त होती हैं। इन तीनों असमिकाओं को एकसाथ संचित करने तथा $\frac{1}{p}$ के लिए s लिखने पर हमें

$$0<F(x)\leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant 1} H(s, x) \quad (0<x<\infty)$$

प्राप्त होता है, जहाँ परिभाषा के अनुसार

$$H(s, x)=\left(\frac{\pi s}{4}\right)^{1/2s}\left[\frac{1}{2x}\left(1-s\right)\right]^{(1-s)} \quad (0<s<1)$$

$$H(0, x) = \lim_{s \to 0} H(s, x) = \frac{1}{2x}$$

$$H(1, x) = \lim_{s \to 1} H(s, x) = \frac{1}{2} \cdot$$

स्पष्ट है कि प्रत्येक $x > 0$ के लिए $H(s, x)$ संहृत अन्तराल $[0, 1]$ में एक संतत वास्तविक फलन है अतः $[0, 1]$ में किसी बिन्दु s_0 पर इसका निम्नक (infimum) प्राप्त होता है और s_0 फलन है x का ।

$H(s, x)$ का लघुगणितीय अवकलन करने पर

$$\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial s} = \text{los} \frac{x\sqrt{(\pi s)}}{1-s} - \frac{1}{2} .$$

चूँकि H $[0, 1]$ में लोप नहीं करता है अतः $\frac{\partial H}{\partial s}$ तभी और केवल तभी लोप करता है जब

$$\log \frac{x\sqrt{(\pi s)}}{1-s} = \frac{1}{2} \qquad 4(a)$$

अथवा, समतुल्यतः, जब और केवल जब

$$s^2 - \left(2 + \frac{\pi}{e} x^2\right) s + 1 = 0. \qquad 4(b)$$

चूँकि $x > 0$, अतः s में इस द्विघाती समीकरण का केवल एक मूल (root) होता है, अर्थात्

$$s_0 = \mu - \sqrt{\mu^2 - 1} \quad \text{जहाँ} \quad \mu = 1 + \frac{\pi}{2e} x^2. \qquad (5)$$

हम देखते हैं कि s_0 [0, 1] के अन्तस्थ है । सरल परिगणन से पता चलता है कि

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\right)_{s=s_0} = \left[\frac{1}{2s_0} + \frac{1}{1-s_0}\right] H(s_0, x) > 0,$$

और हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि अद्वितीय अतिशयता s_0 विवृत अन्तराल $(0, 1)$ में H का स्थानीय निम्निष्ठ है । अतः H अपना निम्नतम मान, माना कि $H_0(x)$ को $s = s_0$ पर प्राप्त कर लेता है । और भी

$$H_0(x) = H(s_0, x) = \frac{1-s_0}{2x} e^{1/2s_0},$$

जहाँ $4(a)$ का उपयोग व्यंजक $H(s_0, x)$ के सरलीकरण में प्रयुक्त होता है ।

इस प्रकार अन्त में हमें प्राप्त होता है कि

$$\text{erf}\ (x) \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1-s_0}{x} e^{1/2s0 - x^2} = \phi(x), \text{ माना} .$$

आगे दी गई सारणी यह सूचित करती है कि त्रुटि [erf (x) $-\phi(x)$], का उच्चतम मान $x=0.3$ के निकट लगभग 0·007106 होता है और आपेक्षिक त्रुटि $\left[1-\frac{\phi(x)}{\text{rf}\ (x)}\right]$, का उच्चतम मान $x=0{\cdot}04$ के निकट लगभग 0.04153 होता है।

सारणी

x	erf (x)	$\phi(x)$	erf (x) $-\phi(x)$	$1-\frac{\phi(x)}{\text{erf}\ (x)}$
0·02	0·02256	0·02170	0·0008622	0·03821
0·04	0·04511	0·04324	0·001874	0·04153
0·06	0·06762	0·06488	0·002743	0·04057
0·08	0·09008	0·8661	0·003468	0·03850
0·1	0·1125	0·1083	0·004120	0 03664
0·2	0·2227	0·2164	0·006295	0·02827
0·3	0·3286	0.3215	0·007106	0·02162
0·4	0·4284	0·4214	0·007027	0·01640
0·5	0·5205	0·5141	0·006428	0·01235
1·0	0·8427	0·8405	0·002178	0·002584
2·0	0·9954	0·9953	0·00008982	0·00009024

निर्देश

1. एडविन हेविट तथा कार्ल स्ट्रामबर्ग, Real and Abstract Analysis. स्प्रिंग वर्लाग, न्यूयार्क, 1965

2. यूजीन यांके तथा फ्रिट्ज एमडे, Tables of Functions with Formulae and Curves. डोवर प्रकाशन, न्यूयार्क 1945

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 311-314

तीन चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलन

पी० सी० मुणोत तथा पी० ए० पद्मनाभम
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—सितम्बर 28, 1981]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में श्रीवास्तव तथा धवन द्वारा परिभाषित तीन चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों के लिए समाकल निरूपण दिये गये हैं।

Abstract

On hypergeometric functions of three variables. *By* P. C. Munot and P. A. Padmanabham, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In this paper, the authors have given integral representations for hypergeometric functions of three variables defined by Srivastava [1972] and Dhawan [1970].

1. प्रस्तावना

हाल ही में सरन के फलनों का अध्ययन करते हुए पाण्डेय[3] ने तीन चरों वाले दो नवीन फलनों G_A तथा G_B को परिभाषित किया है। इसी श्रृंखला में धवन[1] ने अन्य दो फलनों G_C तथा G_D को परिभाषित किया है।

धवन की परिभाषा के अनुसार,

$$G_C(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta, x, y, z)$$

$$= \sum_{m,\, n,\, p=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{p-m}\, (\alpha_2)_n\, (\beta_1)_{m+p}\, (\beta_2)_n}{(\delta)_{n+p+m}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^m}{n!} \frac{z^p}{p!} \tag{1.1}$$

जहाँ $|x|<1, |y|<1, |z|<1$

तथा $G_D(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3; \delta, x, y, z)$

$$= \sum_{m,\, n,\, p=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{p-m}\,(\alpha_2)_n\,(\beta_1)_m\,(\beta_2)_n\,(\beta_3)_p}{(\delta)_{n+p-m}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \tag{1.2}$$

जहाँ $|x|<1, \quad |y|<1, \quad |z|<1$

विश्लेषण में धवन ने कतिपय अवकल समीकरणों के अध्ययन के अन्तर्गत श्रीवास्तव[6] द्वारा प्रचारित फलन से भिन्न फलन

$G_C\,(\alpha, \beta_1, \beta_2; \delta; x, y, z)$

$$= \sum_{m,\, n,\, p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+p}\,(\beta_1)_{m+n}\,(\beta_2)_{n-p}}{(\delta)_{m+n-p}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \tag{1.3}$$

का प्रयोग किया है जहाँ $|x|<1, \quad |y|<1, \quad |z|<1.$

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य तीन चरों वाले इन तीनों हाइपरज्यामितीय फलनों में से जिन्हें (1.1), (1.2) तथा (1.3) द्वारा दिया गया है, प्रत्येक के लिए समाकल निरूपण प्राप्त करना है।

2. सर्वप्रथम हमारी स्थापना होगी कि

(अ) श्रीवास्तव का फलन

$G_C\,(\alpha, \beta_1, \beta_2; \delta; x, y, z)$

$$= A \iint\limits_{\substack{(u \geqslant 0,\, v \geqslant 0, \\ u+v \leqslant 1)}} u^{\alpha-1}\, v^{\alpha+2\beta_2-\delta}\, (1-ux-vy)^{-\beta_1}\, (v+uz-uv-v^2)^{\delta-\alpha-\beta_2-1} \,.\, du dv \tag{2.1}$$

जहाँ $A = \Gamma(\delta)/\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta_2)\, \Gamma(\delta-\alpha-\beta_2)$

तथा $Re(\alpha)>0, \quad Re(\beta_2)>0, \quad Re(\delta-\alpha-\beta_2)>0.$

उपपत्ति : परिभाषा (1.3) से हमें प्राप्त होता है कि

$G_C\,(\alpha, \beta_1, \beta_2; \delta; x, y, z)$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p\,(1-\delta)_p}{(1-\beta_2)_p} F_1\,(\beta_1, \alpha+p, \beta_2-p; \delta-p; x, y) \frac{z^p}{p!} \tag{2.2}$$

जो ऐपेल फलन F_1 के समाकल निरूपण का उपयोग करने पर [एर्डेल्यी इत्यादि[2]] अर्थात्

$$F_1(a, b_1, b_2; c; x, y)$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b_1)\,\Gamma(b_2)\,\Gamma(c-b_1-b_2)}\int\limits_{\substack{u\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\\ u+v\leqslant 1)}}\int u^{b_1-1}\, v_b{}^{2-1}$$

$$.\,(1-u-v)^{c-b_1-b_2-1}\,(1-ux-vy)^{-a}\,d\,udv \tag{2.3}$$

जहाँ $Re(b_1)>0,\quad Re(b_2)>0,\quad Re(c-b_1-b_2)>0,$

हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$G_C(\alpha, \beta_1, \beta_2; \delta; x, y, z)$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta_2)\,\Gamma(\delta-\alpha-\beta_2)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta_2-\delta)}{.p!}(-z)^p$$

$$\int\limits_{\substack{(u\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\\ u+v\leqslant 1)}}\int u^{\alpha+p-1}\, v^{\beta_2-p-1}\,(1-u-v)^{\delta-\alpha-\beta_2\ p-1}\,(-ux-vy)^{-\beta_1}\,du\,dv$$

अब समाकल तथा संकलन के क्रम को बदलने पर यह (2.1) के दक्षिण पक्ष में तुरन्त ही समानीत हो जाता है।

इसके बाद हम घवन के फलनों के लिए निम्नलिखित समाकल निरूपणों की स्थापना करेंगे।

$$G_C(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \delta; x, y, z)$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\delta-\alpha_1-\alpha_2)}\int\limits_{\substack{(u\geqslant 0_1\ v\geqslant 0,\\ u+v\leqslant 1)}}\int u^{\alpha_2-1}\, v^{\alpha_1+\beta_1-1}$$

$$.\,(1-u-v)^{\delta-\alpha_2-\alpha_1-1}\,(1-uy)^{-\beta_2}\,(v-v^2z-x)^{-\beta_1}\,du\,dv \tag{2.4}$$

जहाँ $Re(\alpha_1)>0$, $Re(\alpha_2)>0$, तथा $Re(\delta-\alpha_1-\alpha_1>0.$

$$G_D(\alpha_1\ \alpha_2, \beta_1; \beta_2, \beta_3; \delta; x, y, z)$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)\,\Gamma(1-\alpha_1)}{\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)\,\Gamma(\beta_3)\,\Gamma(\delta-\beta_2-\beta_3)\,\Gamma(1-\alpha_1-\beta_1)}$$

$$\int\limits_{\substack{(1\geqslant u\geqslant 0,\ \ v\geqslant 0,\\ w\geqslant 0,\ v+w\leqslant 1)}}\int u^{\beta_1-1}\, v^{\beta_2-1}\, w^{\beta_3-1}\,(1-u)^{-\alpha_1-\beta_1}\,(1-vy)^{-\alpha_2}$$

$$.\,(1-wz)^{-\alpha_1}\,(1-v-w-ux+uwxz)^{\delta-\beta_2-\beta_3-1}\,d\,udvdw \tag{5.2}$$

जहाँ $Re(1-\alpha_1)>0$, $Re(\beta_1)>0$, $Re(\beta_2)>0$, $Re(\beta_3)>0$, तथा $Re(\delta-\beta_2-\beta_3)>0$.

परिणाम (2.4) तथा (2.5) की उपपत्तियां ठीक वैसी हैं जैसी परिणाम (2.1) की ।

निर्देश

1. धवन, जी० के०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1970, **40A**, 43-48.
2. एर्डेल्यी, ए०, इत्यादि, Higher Transcendental functions. भाग I, न्यूयार्क 1953.
3. पाण्डेय, आर० सी०, Jour. of Math. and Mech., Indiana. 1963, **12(1)**, 113-118.
4. सरन, एस०, **गणित**, 1954, 5(**2**), 77-91.
5. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंहल, जे० पी०, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sc. Maths. Astro. Phys., 1972, **20** 355-363.
6. श्रीवास्तव, एच० एम०, Maths. Vesnek, 1972, **9(24)**, 101-107.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages, 315-321

दो चरों वाले H-फलन के लिए टेलर श्रेणी का समाकल अनुरूप

श्रीमती मृदुला गर्ग
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—अगस्त 13, 1981]

सारांश

प्रस्तुत शोध-पत्र में पहले तो काल्पनिक कोटि वाले आंशिक व्युत्पन्न के सम्प्रयोग द्वारा दो चरों वाले H-फलन के लिए और बाद में एक चर वाले H-फलन के लिए टेलर श्रेणी का समाकल अनुरूप प्राप्त किया गया है। फलस्वरूप कुछ विशिष्ट दशाएँ प्राप्त हुई हैं जो हाल ही में ओसलर द्वारा प्रतिवेदित फलों के तुल्य हैं।

Abstract

An integral analogue of Taylor's series for the H-function of two variables. *By* (Mrs.) Mridula Garg, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur, (Rajasthan).

In this paper we have first obtained the integral analogue of Taylor's series for the H-function of two variables by the application of the fractional derivative of arbitrary order. Corresponding results involving the hypergeometric function of two variables follow as particular cases of our main result. Again, we also obtain here an integral analogue of Taylor's series for the H-function of one variable which yields as its particular cases some of the results recently obtained by Osler[9].

1. प्रस्तावना तथा परिभाषाएं

ओसलर[9] ने परिचित टेलर श्रेणी के एक समाकल अनुरूप को निम्नलिखित अत्यन्त सार्वीकृत रूप में दिया है।

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_z^{\omega+\gamma} f(z)|z=z_0}{\Gamma(\omega+\gamma+1)} (z-z_0)^{\omega+\gamma}\, d\omega \tag{1.1}$$

जहाँ γ काल्पनिक सम्मिश्र संख्या है और z वृत्त $|z=z_0|=|z_0|$ तक सीमित है।

यही नहीं, यहाँ आंशिक व्युत्पन्नों के लिए यहाँ जो परिभाषाएँ प्रयुक्त हैं वे रास[2] द्वारा दी गई हैं। काल्पनिक q के लिए एक फलन $f(z)$ को q वें कोटि के व्युत्पन्न (1.2) द्वारा दिया जाता है

$$D_z^q f(z)=\frac{1}{\Gamma(-q)}\int_0^z (z-t)^{-q-1} f(t)\, dt, \text{ यदि } q<0, \tag{1.2}$$

तथा

$$D_z^q f(z)=\frac{d^n}{dz^n}\left[D_z^{q-n} f(z)\right], \quad \text{यदि } q\geqslant 0, \tag{1.3}$$

जहाँ n ऐसा घन पूर्णांक है कि $n>q$.

फाक्स के H-फलन[3] की परिभाषा को हम निम्नरूप में लिखेंगे :

$$H_{P,Q}^{M,N}\left[z\right]=H_{P,Q}^{M,N}\left[z\left|\begin{matrix}(a_j, \alpha_j)_{1,P}\\(b_j, \beta_j)_{1,Q}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\, z^s\, ds \tag{1.4}$$

जहाँ $i=\gamma(-1)$ तथा

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=N+1}^{P}\Gamma(a_j-\alpha_j s)} \tag{1.5}$$

$r\neq 0$ तथा रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है। M, N, P, Q संख्याओं से $0\leqslant M\leqslant Q$, $0\leqslant N\leqslant P$, की तुष्टि होती है, α_j $(j=1,\ldots, P)$, β_j $(j=1,\ldots, Q)$ समस्त गुणांक घन हैं तथा a_j $(j=1,\ldots, P)$, b_j $(j=1,\ldots, Q)$ संमिश्र संख्यायें हैं। L उपयुक्त कंटूर है तथा $\theta(s)$ के पोल सरल मान लिए गए हैं। (1.4) के अभिसरण तथा वैश्लेषिकता के प्रतिबन्धों के लिए गुप्ता तथा जैन का शोधपत्र [6, p. 597, Eqns. (3.1) to (3.6)] देखें।

हमें दो चरों वाले H-फलन की आवश्यकता होगी जिसे मित्तल तथा गुप्ता[7] ने परिभाषित किया है और यहाँ पर निम्नलिखित रूप में[4] दिया जा रहा है :

$$H[x, y]=H_{p_1,q_1;p_2,q_2;p_3,q_3}^{0,n_1;m_2n_2;m_3,n_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_j; \alpha_j, A_j)_{1,p_1}; (c_j, \gamma_j)_{1,p_2}; (e_j, E_j)_{1,p_3}\\(b_j; \beta_j, B_j)_{1,q_1}; (d_j, \delta_j)_{1,q_2}; (f_j, F_j)_{1,q_3}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)}\int_{L_1}\int_{L_2}\theta(s, t)\,\phi_1(s)\,\phi_2(t)\,x^s\,y^t\,ds\,dt \tag{1.6}$$

जहाँ

$$\theta(s, t)=\frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t)} \tag{1.7}$$

$$\phi_1(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+\delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-\gamma_j s)} \tag{1.8}$$

$$\phi_2(t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-E_j t)} \tag{1.9}$$

प्राचलों के विभिन्न प्रतिबन्धों तथा अभिसरण के प्रतिबन्धों के लिए मित्तल तथा गुप्ता[7] का शोधपत्र देखना चाहिए।

2. मुख्य फल

प्रस्तुत प्रपत्र का मुख्य फल दो चरों वाले H-फलन के लिए टेलर की श्रेणी का समाकल अनुरूप है जो निम्नलिखित है :

$$z^{\lambda} H[az^h, bz^k]=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0^{\lambda-\omega-\gamma}}{\Gamma(\omega+\gamma+1)} (z-z_0)^{\omega+\gamma} H^{0,n_1+1;m_2,n_2;m_3,n_3}_{p_1+1,q_1+1;p_2,q_2;p_3,q_3} \left[\begin{array}{c|l} az_0^h & (-\lambda; h, k), (a_j; \alpha_j, A_j)_{1,p_1}; (c_j, \gamma_j)_{1,p_2}; (e_j, E_j)_{1,p_3} \\ bz_0^k & (b_j; \beta_j, \beta_j)_{1,q_1}, (-\lambda+\omega+\gamma; h,k); (d_j, \delta_j)_{1,q_2}; (f_j, F_j)_{1,q_3} \end{array}\right] d\omega \tag{2.1}$$

यदि $|z-z_0|=|z_0|$ तथा बशर्ते कि

$$Re\left(\lambda+h\frac{d_i}{\delta_i}+k\frac{f_j}{F_j}+1\right)>0,\ 1\leqslant i\leqslant m_2,\ 1\leqslant j\leqslant m_3$$

जहाँ $h>0, k>0$ । यही नहीं, (2.1) में आये दो चरों वाले H-फलन को मित्तल तथा गुप्ता[7] के शोध-पत्र के (i) से लेकर (vi) तक के प्रतिबन्धों को तुष्ट करना चाहिये ।

उपपत्ति :

(2.1) को स्थापित करने के लिए हम निम्नलिखित फलन पर विचार करते हैं

$$f(z)=z^{\lambda}\, H[az^{h},\, bz^{k}],\ h>0,\ k>0 \tag{2.2}$$

और रैना तथा कौल[8] के द्वारा प्राप्त फल को व्यवहृत करते हुए हम इसके $(\omega+\gamma)$वें आंशिक व्युत्पन्न को निम्न प्रकार से प्राप्त करते हैं :

$$D_{z}^{\omega+\gamma} f(z)=z^{\lambda-\omega-\gamma}\ H^{0,n_1+1;m_2,n_2;m_3,n_3}_{p_1+1,q_1+1;p_2,q_2;p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix} az^{k} \\ bz^{k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (-\lambda;\, h,\, k),\, (a_j;\, \alpha_j;\, A_j)_{1,p_1};\, (c_j,\, \gamma_j)_{1,p_2};\, (e_j,\, E_j)_{1,p_3} \\ (b_j;\, \beta_j,\, B_j)_{1,q_1},\, (-\lambda+\omega+\gamma;\, h,\, k);\, (d_j,\, \delta_j)_{1,q_2};\, (f_j,\, F_j)_{1,q_3} \end{matrix} \right] \tag{2.3}$$

बशर्ते कि

$$Re\left(\lambda+h\,\frac{d_i}{\delta_i}+k\,\frac{f_j}{F_j}+1\right)>0,\ 1\leqslant i<m_2,\ 1\leqslant j\leqslant m_3.$$

(1.1) में क्रमश: (2.2) तथा (2.3) से $f(z)$ एवं $D_{z}^{\omega+\gamma} f(z)$ के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें फल (2.1) प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशाएं

(i) यदि (2.1) में हम $k\to 0$ मानें तो हमें एक चर वाले विख्यात H-फलन के लिए टेलर श्रेणी का निम्नलिखित समाकल अनुरूप प्राप्त होता है

$$z^{\lambda}\, H^{M,N}_{P,Q}\left[az^{h}\middle| \begin{matrix} (a_j,\, \alpha_j)_{1,P} \\ (b_j,\, \beta_j)_{1,Q} \end{matrix}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0^{\lambda-\omega-\gamma}}{\Gamma(\omega+\gamma+1)}\,(z-z_0)^{\omega+\gamma}$$

$$H^{M,N+1}_{P+1,Q+1}\left[az_0^{h}\middle| \begin{matrix} (-\lambda,\, h),\, (a_j,\, \alpha_j)_{1,P} \\ (b_j,\, \beta_j)_{1,Q},\, (-\lambda+\omega+\gamma,\, h) \end{matrix}\right] d\omega \tag{3.1}$$

यदि $|z-z_0|=|z_0|$ तथा बशर्ते कि

$$Re\left(\lambda+h\frac{b_j}{\beta_j}+1\right)>0,\ 1\leqslant j\leqslant m,\ h>0$$

पुनः $|\arg a|<\frac{A\pi}{2}$, जहाँ

$$A=\sum_{1}^{N}(\alpha_j)-\sum_{N+1}^{P}(\alpha_j)+\sum_{1}^{M}(\beta_j)-\sum_{M+1}^{Q}(\beta_j)>0.$$

(ii) (2.1) में आये दो चरों वाले H-फलन को श्रीवास्तव[5] द्वारा प्रचारित सार्वीकृत कैम्पे-द-फेरी फलन में समानीत करने पर निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0^{\lambda-\omega-\gamma}}{\Gamma(\omega+\gamma+1)}(z-z_0)^{\omega-\gamma}\ S^{p_1+1;p_2;p_3}_{q_1+1;\ q_2-1;\ q_3-1}$$

$$\left[\begin{matrix}(1+\lambda;h,k),(a_j;\alpha_j,A)_{1,p_1};(c_j,\gamma_j)_{1,p_2};(e_j,E_j)_{1,q_3}\\(b_j,\beta_j,B_j)_{1,q_1},(1+\lambda-\omega-\gamma;h,k);(d_j.\ \delta_j)_{1,q_2};\ (f_j,F_j)_{1,q_3}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}z_0\\z_0\end{matrix}\right]d\omega$$

$$=z^{\lambda}\ S^{p_1;p_2;p_3}_{q_1;q_2-1;q_3-1}\left[\begin{matrix}(a_j;\alpha_j;A)_{1,p_1};(c_j,\gamma_j)_{1,p_2};(e_j,E_j)_{1,p_3}\\(b_j;\beta_j,B_j)_{1,q_1};(d_j,\delta_j)_{2,q_2};(f_j,F_j)_{2,q_3}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}z\\z\end{matrix}\right]\tag{3.2}$$

(iii) (2.1) में यदि हम $h=k=1$, $a=b=-1$, $p_1=q_1=0$ लें एवं दो चरों वाले H-फलन को ऐपेल फलन F_1[1] में समानीत करें तो थोड़े से सरलीकरण के बाद निम्नलिखित फल प्राप्त होता है :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0^{\lambda-\omega-\gamma}\ \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(\omega+\gamma+1)\ \Gamma(1+\lambda-\omega-\gamma)}(z-z_0)^{\omega+\gamma}\times F_1(1+\lambda,c,e;1+\lambda-\omega-\gamma;z_0,z_0)\,d\omega$$

$$=z^{\lambda}(1-z)^{-c-e}\qquad\qquad |z_0|<1\tag{3.3}$$

जो समानयन सूत्र [1, p. 239]

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma,x,x)={}_2F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x)$$

का प्रयोग करने पर एक अन्य रोचक फल प्रदान करता है

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0^{\lambda-\omega-\gamma}\,\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(\omega+\gamma+1)\,\Gamma(1+\lambda-\omega-\gamma)}(z-z_0)^{\omega+\gamma}\;{}_2F_1\,(1+\lambda,\,c+e;\,1+\lambda-\omega-\gamma;\,z_0)\,d\omega$$

$$=z^{\lambda}\,(1-z)^{-c-e} \qquad |z_0|<1 \qquad (3.4)$$

(iv) पुनः (2.1) में $h=k=1,\ a=b=-1,\ p_1=q_1=0$ रखें और दो चरों वाले फलन को ϕ_1 [1, p. 225] में समानीत कर लें जो ऐपेल फलन का संगामी रूप है तो हमें

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0^{\lambda-\omega-\gamma}\,\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(\omega+\gamma+1)\,\Gamma(1+\lambda-\omega-\gamma)}(z-z_0)^{\omega+\gamma}$$

$$\times\phi_1\,(1+\lambda,\,c;\,1+\lambda-\omega-\gamma;\,z_0,\,z_0)\,d\omega$$

$$=z^{\lambda}\,e^{z}\,(1-z)^{-c} \qquad |z_0|<1 \qquad (3.5)$$

प्राप्त होता है ।

(v) $h=1,\ a=-1$ रखने, (3.1) में फाक्स के H-फलन को ${}_PF_Q$ [6, p. 600, eqn. (4.6) में समानीत करने पर हमें ओसलर[9] का पूर्वज्ञात फल प्राप्त होता है ।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0^{\lambda-\omega-\gamma}\,\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(\omega+\gamma+1)\,\Gamma(1+\lambda-\omega-\gamma)}\,(z-z_0)^{\omega+\gamma}$$

$${}_{P+1}F_Q\left[\begin{matrix}1+\lambda,\,a_1,\,\ldots,\,a_P;\\ 1+\lambda-\omega-\gamma,\,b_2,\,\ldots,\,b_Q;\end{matrix}\;z_0\right]d\omega$$

$$=z^{\lambda}\;{}_PF_{Q-1}\left[\begin{matrix}a_1,\,\ldots,\,a_P;\\ b_2,\,\ldots,\,b_Q;\end{matrix}\;z\right] \qquad (3.6)$$

$|z_0|<1$ यदि $P=Q$

यदि उपर्युक्त फल में हम $P=0$ तथा $Q=1$ रखें तो हमें एक और फल प्राप्त होता है जिसे इसके पूर्व ओसलर ने[9] प्राप्त किया है।

इसके आगे (3.6) में $P=1,\ Q=2$ तथा $a_1=-n$ रखने पर हमें ओसलर का एक अन्य फल (फल 15) प्राप्त होता है ।

(vi) $h=1$, $a=1$ लेने तथा (3.1) में एक चर वाले फलन को तर्क $(-z_0)$ सहित $_pF_Q$ में समानीत करने पर हमें $_pF_Q$ के विभिन्न प्राचलों के विशिष्टीकरण तथा कुछ सरलीकरण के बाद ओसलर के फल 2, 8, 9 तथा 16 प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध-पत्र की तैयारी में डा० के० सी० गुप्ता ने जो सहायता की एवं सुझाव दिये उसके लिए लेखिका आभार व्यक्त करती है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcedental Functions, भाग 1, मैकाग्रहिल, न्यूयार्क 1953.

2. रास, बी०, Lectures on Fractional Calculus, स्प्रिंगर-वर्लाग, न्यूयार्क, 1975.

3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 323-329

हाइपरज्यामितीय फलन ${}_1F_2$ वाले समाकल समीकरण का हल

एच० एल० गुप्ता तथा के० सी० रूसिया
गणित विभाग, शासकीय अभियांत्रिक महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—मार्च 26, 1979]

सारांश

एक समाकल समीकरण के हल दो विभिन्न परिस्थितियों में प्रस्तुत किये गये हैं जिसमें अष्टि रूप में हाइपरज्यामितीय फलन ${}_1F_2$ है।

Abstract

On the solution of an integral equation involving hypergeometric function ${}_1F_2$. *By* H.L. Gupta and K.C. Rusia, Department of Mathematics, Government Engineering College, Ujjain.

Two inversion theorems for an integral equation involving hypergeometric function ${}_1F_2$ have been obtained.

1. प्रस्तावना

ज्ञात समाकल[6] का प्रयोग करते हुए जगेत्या[1] ने लैप्लास परिवर्त को व्यवहृत करके निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त किया है।

यदि (i) $m=1, 2, 3, \ldots; n=0, 1, 2, \ldots$ (ii) $f^{[2n+m+2]}(t)$ संतत हो क्योंकि $0 \leqslant t < \infty$ तथा $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(2n+m+1)}(0)=0$, तो समाकल समीकरण

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{b^r (2n+2)_r}{r!\, \Gamma(2n+m+r+2)} \int_0^t e^{-b(t-u)} \,.\, (t-u)^{2n+m+r+1}.$$

$$ {}_2F_3\left[\begin{matrix} n+r/2+1,\ n+r/2+3/2; \\ n+3/2,\ n+m/2+r/2+1,\ n+m/2+r/2+3/2; \end{matrix} -\frac{a^2}{4}(t-u)^2\right] g(u)\, du = f(t) \tag{1.1}$$

का निम्नलिखित हल होगा :

$$g(t)=(D^2+a^2)^{n+1} \,.\, (D+b)^m f(t), \text{ जहाँ } D\equiv d/dt. \tag{1.2}$$

बशर्ते कि (1.1) के वाम पक्ष का अस्तित्व हो ।

प्रस्तुत प्रपत्र में रीमान लायोविले आंशिक समाकल [6, p. 195 (65)] का प्रयोग करते हुए एक समाकल समीकरण के लिए जिसमें हाइपरज्यामितीय फलन ${}_1F_2$ निहित है दो विलोमन प्रमेय प्राप्त करेंगे । यद्यपि उपयुक्त प्रमेय में अष्टि एक हाइपरज्यामितीय फलन ${}_2F_3$ है किन्तु इस प्रपत्र में प्राप्त किये जाने वाले प्रमेय इसके अन्तर्गत नहीं आते । प्रयुक्त विधि जगेत्या[1] की विधि के समान है । साथ ही हम भारतीय[2] तथा रूसिया[3] की कुछ विशिष्ट दशाओं की विवेचना करेंगे । हम अपने प्रमेय को उपयुक्त उदाहरणों के द्वारा भी समझावेंगे ।

2. उपपत्ति के लिए आवश्यक परिणाम

यदि

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt,\ rep>0, \tag{2.1}$$

तो

$$F(p)\doteq L\{f(t)\} \text{ अथवा } F(p)\doteq f(t). \tag{2.2}$$

[4, p. 131, p. 144, p. 217, p. 129, p. 185, p. 197] से हमें ज्ञात है कि

$$F_1(p)\,.\,F_2(p)\doteq\int_0^t f_1(u)\,.\,f_2(t-u)\,du, \tag{2.3}$$

जहाँ $F_1(p)\doteq f_1(t)$ तथा $F_2(p)\doteq f_2(t)$.

$$(p+a)^{-m}\doteq\frac{t^{m-1}\,.\,e^{-at}}{\Gamma(m)},\ Re\ m>0,\ Re\ p>-Re\ b. \tag{2.4}$$

$$\Gamma(l)\,(p-a)^{-n}\,.\,p^{n-l}\doteq t^{l-1}\,{}_1F_1(n;l;at),\ Re\ l>0,\ Re\ p>0,\ Re\ a>0. \tag{2.5}$$

$$p^n F(p)\doteq f^{(n)}(t) \text{ बशर्ते कि } f(0)=f'(0)=\ldots =f^{(n-1)}(0)=0. \tag{2.6}$$

$$p^{-n-1}\,.\,e^{-b^2/4p}\doteq(2/b)^n\,.\,t^{n/2}J_n(bt^{1/2}),\ Re\ n>-1,\ Re\ p>0. \tag{2.7}$$

$$p^{-n-1} \,.\, e^{-b^2/4p} \doteq (2/b)^n\, t^{n/2}\, I_n\,(bt)^{1/2},\ Re\ n>-1,\ Re\ p>0. \tag{2.8}$$

बेसेल तथा संशोधित बेसेल फलनों को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं[5]

$$J_n\,(z)=\frac{(z/2)^n}{\Gamma(1+n)}\ {}_0F_1\,(-;\ 1+n;\ -z^2/4). \tag{2.9}$$

$$I_n\,(z)=\frac{(z/2)^n}{\Gamma(1+n)}\ {}_0F_1\,(-;\ 1+n;\ z^2/4). \tag{2.10}$$

हमें ज्ञात है कि रीमान-लियोविले आंशिक समाकल[6].

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t u^{\lambda-1/2v-1}\,.\,J_v\,(bu^{1/2})\,.\,(t-u)^{\mu-1}\,du \tag{2.11}$$

$$=\frac{b^v\, t^{\lambda+\mu-1}\,\Gamma(\lambda)}{2^v\,\Gamma(\lambda+\mu)\,\Gamma(v+1)}\ {}_1F_2\left[\begin{matrix}\lambda; & \frac{-b^2}{4}\,t\\ & \\ v+1,\ \lambda+\mu; & \end{matrix}\right],$$

$Re\ \lambda>0,\ Re\ \mu>0$

3. प्रमेय I

यदि (i) $m=1;2,3,\ldots;\ n=0,1,2,\ldots$ (ii) $f^{(2n+2m+2)}(t)$ संतत है क्योंकि $0\leqslant t<\infty$ तथा $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(2n+2m+1)}(0)=0$, तो समाकल समीकरण

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a^r\,(n+1)_r}{r!\,\Gamma(r+n+m+1)}\int_0^t e^{-a(t-u)}\,.\,(t-u)^{r+n+m}. \tag{3.1}$$

$${}_1F_2\left[\begin{matrix}r+n+1; & \frac{-b^2}{4}(t-u)\\ & \\ n+1;\ r+n+m+1; & \end{matrix}\right]g(u)\,du=f(t)\ .$$

का हल इस प्रकार होगा :

$$g(t)=(2/b)^{n+m}\int_0^t (t-u)^{1/2(n+m)}\,.\,I_{n+m}\,\{b\,(t-u)^{1/2}\}. \tag{3.2}$$

$$[D^{2n+m+2}\,.\,(D+a)^m\,\{f(u)\}]\,du,\ \text{जहाँ}\ D\equiv d/du,$$

बशर्ते कि (3.1) के वाम पक्ष का अस्तित्व हो।

उपपत्ति : संवलन प्रमेयों (2.3), (2.4) तथा (2.7) को व्यवहृत करने पर

$$p^{-n-1}\, e^{-b^2/4p} \,.\, (p+a)^{-m} \doteq \frac{2^n\, e^{-at}}{b^n\, \Gamma(m)} \int_0^t e^{au} \,.\, u^{n/2}\, J_n\,(bu^{1/2}) \;.\; (t-u)^{m-1} du. \tag{3.3}$$

चरघातांकी फलन e^{au} को u के घातों में प्रसारित करने पर हम पाते हैं :

$$p^{-n-1} \,.\, e^{-b^2/4p} \,.\, (p+a)^{-m} \doteq \frac{2^n\, e^{-at}}{b^n\, \Gamma(m)} \int_0^t \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r}{r!} u^{r+n/2} \,.\, J_n\,(bu^{1/2}) \,.\, (t-u)^{m-1} \,.\, du. \tag{3.4}$$

सम्बन्ध (2.11) के बल पर

$$p^{-n-1} \,.\, e^{-b^2/4p} \,.\, (p+a)^{-m} \doteq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r\, e^{-at}\, (n+1)_r \,.\, t^{r+n+m}}{r!\, \Gamma(r+n+m+1)}$$

$$\,.\, {}_1F_2 \left[\begin{matrix} r+n+1; & \dfrac{-b^2}{2}\, t \\ n+1,\; r+n+m+1; & \end{matrix} \right] \tag{3.5}$$

$Re\,(m)>0,\ Re\,(r+n+1)>0.$

संवलन प्रमेयों (2.3) से (3.1) तक को सम्प्रयुक्त करने पर

$$L \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r\, (n+1)_r\, e^{-at}\, t^{r+n+m}}{r!\, \Gamma(r+n+m+1)} \; {}_1F_2 \left(\begin{matrix} r+n+1; & \dfrac{-b^2}{2} t \\ n+1,\; r+n+m+1; & \end{matrix} \right) \right\} \,.\, G(p) = F(p)$$

ज़हाँ, $G(p) \doteq g(t)$ तथा $F(p) \doteq f(t)$.

(3.5) का उपयोग करने पर

$$G(p) = p^{n+1} \,.\, e^{b^2/4p} \,.\, (p+a)^m\, F(p) \tag{3.6}$$

जिससे कि

$$G(p) = p^{-(n+m)-1} \,.\, e^{b^2/4p} \,.\, p^{2n+m+2} \,.\, (p+a)^m\, F(p). \tag{3.7}$$

(3.7) में (2.6) तथा (2.8) का प्रयोग करने और फिर इनके विलोमों को लेने पर हमें वांछित फल (3.2) प्राप्त होता है।

विशिष्ट दशा

$a=0, b=2, m=1$; लेने, n को $(n-1)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा (2.9) को अपने प्रमेय में सम्प्रयुक्त करने पर हमें ज्ञात होता है कि समाकल समीकरण

$$\int_0^t (t-u)^{n/2} J_n \{2.(t-u)^{1/2}\} g(u)\, du=f(t). \tag{3.8}$$

का हल

$$g(t)=\int_0^t (t-u)^{n/2} \,.\, I_n \{2 \,.\, (t-u)^{1/2}\} [D^{2n+2} f(u)]\, du. \tag{3.9}$$

होगा बशर्ते कि $f^{(k)}(0)=0$ क्योंकि $k=0, 1, 2, \ldots, (2n-1)$, जो भारतीय[2] का प्रमेय है।

प्रमेय II

यदि (i) $m=1, 2, 3, \ldots; n=0, 1, 2, \ldots$ (ii) $f^{(m+n+2)}(t)$ संतत है क्योंकि $0 \leqslant t \infty$ तथा $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(m+n+1)}(0)=0$, तो समाकल समीकरण (3.1) का हल

$$g(t)=\int_0^t I_0 \{b(t-u)^{1/2}\} [D^{n+2} (D+a)^m f(u)]\, du,$$

होगा जहाँ $D \equiv d/du.$

यह ध्यान देने की बात है कि इस प्रमेय के प्रतिबन्ध प्रमेय I की अपेक्षा कम संकुचित हैं।

उपपत्ति : हम सम्बन्ध (3.7) को निम्नलिखित रूप में लिखेंगे

$$G(p)=p^{-1} \,.\, e^{b^2/4p} \,.\, p^{n+2} \,.\, (p+a)^m F(p). \tag{3.11}$$

(2.3), (2.6) तथा (2.8) को व्यवहृत करने पर हमें वांछित परिणाम (3.10) प्राप्त होता है। आगे भी, यदि b को by द्वारा प्रतिस्थापित करें तो समाकल समीकरण (3.1) का हल

$$g(t)=\int_0^t J_0 \{b\, (t-u)^{1/2}\} [D^{n+2} (D+a)^m f(u)]\, du. \tag{3.12}$$

होगा बशर्ते कि प्रमेय II के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों।

विशिष्ट दशा

(3.1) तथा (3.10) में $a=0, b=2a^{1/2} i, m=1$ रखने, n को $(x-1)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा (2.10) का उपयोग करने पर हमें ज्ञात होता है कि समीकरण

$$\int_0^t (t-u)^{n/2} I_n [2 \{a(t-u)\}^{1/2}] g(u)\, du = f(t), \tag{3.13}$$

का हल

$$g(t) = a^{-n/2} \int_0^t J_0 \{2a^{1/2} (t-u)^{1/2}\} \,.\, f^{n+2} (u)\, du, \tag{3.14}$$

है बशर्ते कि $f(t) \in c^{n+2}, 0 \leqslant t < \infty$ तथा $f^{(j)}(0)=0, j=0, 1, 2, \ldots, (n+1)$, जो रूसिया[8] का प्रमेय I है।

4. उदाहरण

इस अनुभाग में हम अपने प्रमेयों का उपयोग कतिपय समाकलों के मूल्यांकन के लिए करेंगे।

हमें निम्नलिखित तत्समक ज्ञात है :

$$\left[p^{-n-1} \,.\, e^{-b^2/4p} \,.\, (p+a)^{-m} \right] \left[\frac{(p+a)^m}{p^{m+n}} \right] = \left[p^{-(2n+m)-1} \,.\, e^{-b^2/4p} \right] \tag{4.1}$$

(4.1) में (2.3), (2.5), (2.7) तथा (3.5) को व्यवहृत करने पर

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r \,(n+1)_r}{r!\, \Gamma(r+n+m+1)} \int_0^t e^{-a(t-u)} \,.\, (t-u)^{r+n+m}. \tag{4.2}$$

$${}_1F_2 \left[\begin{matrix} r+n+1: & \frac{-b^2}{4} (t-u) \\ n+1, r+n+m+1; & \end{matrix} \right] \,.\, \frac{1}{\Gamma(n)} u^{n-1} \, {}_1F_1 (-m; n: -au)\, du$$

$$= (2/b)^{2n+m} \,.\, t^{(2n+m)/2} \,.\, J_{2n+m} (bt^{1/2}).$$

$$Re\,m > 0,\; Re(r+n+1) > 0,\; Re(2n+m) > -1,\; Re\,n > 0.$$

(4.2) की तुलना (3.1) से करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$g(t) = 1/\Gamma(n) \,.\, t^{n-1} \,.\, {}_1\Gamma_1 (-m; n; -at) \tag{4.3}$$

तथा

$$f(t) = (2/b)^{2n+m} \,.\, t^{(2n+m)/2} J_{2n+m} (bt^{1/2}). \tag{4.4}$$

(3.2), (3.10) तथा (3.12) में $g(t)$ तथा $f(t)$ के मानों को क्रमशः (4.3) तथा (4.4) में से प्रतिस्थापित करने एवं सरल करने पर हमें निम्नलिखित समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_0^t (t-u)^{1/2(n+m)} \,.\, I_{n+m} \{b(t-u)^{1/2}\} [D^{2n+m+2} \,.\, (D+a)^m \{u^{n+m/2} \,.\, J_{2n+m} (bu^{1/2})\}]\, du$$

$$=(b/2)^{3n+2m} \cdot \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \, {}_1F_1\,(-m;\, n;\, -at)$$

$$=(b/2)^{3n+2m} \cdot \frac{(m)!}{(m+n-1)!}\, t^{n-1} \cdot L_m^{(n-1)}\,(-at). \qquad (4.6)$$

$Re n>0$, $Re m>0$.

$$\int_0^t I_o\,\{b(t-u)^{1/2}\}\,[D^{n+2}\,(D+a)^m\,\{u^{n+m/2}.\,J_{2n+m}\,(bu^{1/2})\}]\,du$$

$$=(b/2)^{2n+m} \cdot \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\, {}_1F_1\,(-m;\, n;\, -at)$$

$$=(b/2)^{2n+m} \cdot \frac{(m)!\; t^{n-1}}{(m+n+1)!}\; .L_m^{(n-1)}\,(-at). \qquad (4.6)$$

$Re n>0$, $Re m>0$.

$$\int_0^t J_0\,\{b(t-u)^{1/2}\}\,[D^{n+2}\,(D+a)^m\,\{u^{n+m/2}\,.\,I_{2n+m}\,(bu^{1/2})\}]\,du$$

$$=(b/2)^{2n+m} \cdot \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\, {}_1F_1\,(-m;\, n;\, -at)$$

$$=(b/2)^{2n+m} \cdot \frac{(m)!\; t^{n-1}}{(m+n-1)!}\; L_m^{(n-1)}\,(-at) \qquad (4.7)$$

$Re\, n>0$, $Re\, m>0$.

निर्देश

1. जगेत्या, आर० एन०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस** (इंडिया), 1969, **39(A)**, 323-328.
2. भारतीय, पी० एल०, Amer. Math. Monthly. 1965, **72**, 393-397.
3. रूसिया, के० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस** (इंडिया), 1967, **37A**, 67-70.
4. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. भाग I, मकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
5. रेनविले, ई० डी०, Special Functions. मकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क 1965.
6. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. भाग II, मकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 331-335

व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की $[F, d_n]$ संकलनीयता

एस० के० वर्मा

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—जून 10, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में रथ के ही समान व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की $[F, d_n]$ संकलनीयता का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है।

Abstract

On the [F, dn] summability of the derived Fourier series. *By* S. K. Verma, Department of Mathematics and Statistics, Sagar University, Sagar.

Harmonic summability of the derived Fourier series has been studied by Rath[4]. $[F, dn]$ summability has been discussed by Lorch and Newman[3], Miracle[2] and others. In 1977 Holland-Sahney Tzimbalario[1] studied on $[F, dn]$ summability of Fourier series. In the present paper the author wishes to study the $[F, dn]$ summability of the derived Fourier series analogous to the result of Rath[4].

1. माना $f(x) \in L\ (0, 2\pi)$ और इस परास के बाहर 2π आवर्त के साथ आवर्ती है। माना कि इस फलन से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी निम्नवत् है।

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx\ bn \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\ (x) \tag{1.1}$$

तो (1.1) की अवकलित फूरियर श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} nbn\ (\cos nx - an \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n\ (x) \tag{1.2}$$

होगी और सदैव की भाँति हम निम्न प्रकार लिखेंगे

$$\psi(t)=f(x+t)-f(x-t) \quad (1.3)$$

$$s_n=\sum_{r=1}^{n} r\, Br\,(x) \quad (1.4)$$

$$g(t)=\frac{\psi(t)}{4 \sin \frac{1}{2} t}-c \quad (1.5)$$

जहाँ c फलन है x का।

माना $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ धन अचर संख्याओं का स्थिर अनुक्रम है। माना कि

$\sum_{0}^{\infty} a_m$ एक दी हुई श्रेणी है एवं $s_n=\sum_{m=0}^{n} a_m$

श्रेणी $\Sigma\, a_m$ को $[F, d_n]$ संकलनीय कहा जाता है यदि

$$\sigma n=\lim_{n\to\infty} \sum^{\infty} P_{nk}\, S_k \quad (1.6)$$

सान्त सीमा S को अग्रसर होती है ज्यों-ज्यों $n\to\infty$ जहाँ अचर P_{n+k} निम्न प्रकार[1] से परिभाषित हैं।

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{x+d_j}{1+d_j}=\sum_{k=0}^{\infty} P_{nk}\, x^k \quad \text{तथा} \quad P_{00}=1 \quad (1.7)$$

स्पष्ट है कि

$$P_{nk}=0 \qquad \text{यदि } k>n \quad (1.8)$$

तथा

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} = \sum_{k=0}^{n} P_{nk}=1 \quad (1.9)$$

2. रथ[4] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय-R यदि $g(t)$ $(0, \pi)$ में परिबद्ध विचरण वाला है और $g(t)\to 0$ ज्यों-ज्यों $t\to 0$ तो श्रेणी (1.2) मान c तक संकलनीय $\left(N, \frac{1}{n}\right)$ है।

हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि $g(t)$ $(0, \pi)$ में परिबद्ध विचरण वाला है और $g(t)\to 0$ ज्यों-ज्यों $t\to 0$ और किसी भी $0<\eta<\pi$ के लिए $(\eta\ \pi)$ में परम संतत हो तो श्रेणी (1.2) संकलनीय $[F, dn]$ है।

3. प्रमेय की उपपत्ति

रथ ने [4, p. 127, (3.2)] प्रदान किया है :

$$S_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\, d\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t \mid \sin\frac{t}{2}\right) dt. \tag{3.1}$$

अतः (1.5), (1.6) तथा (3.1) से

$$\sigma n = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^{\pi} P_{nk}\, g(t) \sin\left(K+\frac{1}{2}\right) \operatorname{cosec}\frac{t}{2}\, dt\right]$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^{\pi} P_{nk}\; g(t)\; \left(K+\frac{1}{2}\right) \cos\left(K+\frac{1}{2}\right) t\, dt\right]$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_0^{\pi} P_{nk}\, g(t) \sin\left(K+\frac{1}{2}\right) t \tan\frac{t}{4}\, dt\right|$$

$$= \sigma_{n,1} - \sigma_{n,2} - \sigma_{n,3}\,. \tag{3.2}$$

अब परिकल्पना से तथा अभिसरण की जोर्डन परीक्षा का भी प्रयोग करने पर[5]

$$\sigma n,\ 1 \rightarrow 0 \quad \text{ज्यों-ज्यों} \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.3}$$

खण्डशः समाकलित करने पर

$$\sigma_{n,2} = -\frac{2}{\pi} g(\pi) \sum_{k=0}^{n} P_{nk} \sin\left(K+\frac{1}{2}\right) \pi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} \sin\left(K+\frac{1}{2}\right) t\, d\, g(t)$$

$$= o(1) + \sum_{k=0}^{n} P_{nk}\, I_k \tag{3.4}$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि

$$\sum_{k=0}^{n} P_{nk}\, I_k = o(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.$$

चूँकि $g(t)$ $(0, \pi)$ में परिबद्ध विचरण वाला है अतः $(0, \pi)$ में सदैव ही δ को प्राप्त कर सकते हैं जो इसके पूर्व चुने गए $\epsilon > 0$ पर निर्भर करेगा जिससे कि

$$\int_0^{\delta} \mid d\, g(t) \mid < \epsilon \tag{3.5}$$

अत: यदि हम लिखें

$$I_k=\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)\sin\left(K+\frac{1}{2}\right)t\,dg(t)$$

$$=I_{k,\,1}=I_{k,\,2},\ \text{माना} \tag{3.6}$$

अब $\left|\sin\left(K+\frac{1}{2}\right)t\right|\leqslant 1$ तथा (3.5) का उपयोग करने पर

$$\left|\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\,I_{k,\,1}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|P_{nk}|\int_0^{\delta}|dg(t)|$$

$$\leqslant\epsilon \tag{3.7}$$

अब यह ध्यान में रखते हुए कि $g(t)$ (δ, π) में परिबद्ध विचरण का है, तो

$$\int_{\delta}^{\pi}\sin\left(K+\frac{1}{2}\right)t\,dg(t)=\int_{\delta}^{\pi}\sin\left(K+\frac{1}{2}\right)t\,g(t)\,dt$$

दिये हुये $\epsilon>0$ के लिए हम k_0 को इस प्रकार चुन सकते हैं कि

$$\left|\int_{\delta}^{\pi}\sin\left(K+\frac{1}{2}\right)t\,g(t)\right|<\epsilon$$

क्योंकि $K<k_0$ (रीमान लेबेस्क प्रमेय से)।

k_0 को स्थिर करते हुए हम एक ऐसा धन पूर्णांक n_0 चुन सकते हैं जिससे

$$|P_{nk}|\leftarrow\frac{\epsilon}{k_0+1}\quad \text{क्योंकि } 0\leqslant K\leqslant k_0 \text{ तथा } n>n_0$$

अत: $$\sum_{k=0}^{n}P_{nk}\,I_{k,\,2}=\left(\sum_{k=0}^{k_0}+\sum_{k_0+1}^{n}\right)P_{nk}\int_{\delta}^{\pi}\sin\left(K+\frac{1}{2}\right)t\,g(t)\,dt$$

$$=I_{k,\,2\cdot1}+I_{k,\,2\cdot2},\ \text{माना} \tag{3.8}$$

तो $$|I_{k,\,2\cdot1}|\leqslant\sum_{k=0}^{k_0}|P_{nk}|\int_{\delta}^{\pi}g(t)\,dt$$

$$\leqslant\frac{N\,\epsilon(k_0+1)}{(k_0+1)}=N\epsilon \text{ जहाँ } N=\int_{\delta}^{\pi}|g(t)|\,dt \tag{3.9}$$

$$|I_{k,\,2\cdot2}|=\sum_{k=k_0+1}^{n}P_{n,\,k}\int_{\delta}^{\pi}\sin\left(K+\frac{1}{2}\right)t\,g(t)\,dt \tag{3.10}$$

$$<\epsilon \sum_{k=k_0+1}^{n} | P_{n,k} |$$

$$\leqslant \epsilon. \tag{3.11}$$

इस प्रकार (3.6), (3·7), (3.9) तथा (3.11) को एकत्र करने पर सिद्ध होता है कि

$$| \sum_{k=0}^{n} P_{nk} I_k | < (N+2) \epsilon$$

$n > n_0$ के लिए क्योंकि ϵ एक यादृच्छिक मात्रा है। हमें $\Sigma P_{nk} I_k = o(1)$ ज्यों-ज्यों $n \to \infty$ प्राप्त होता है।

अतः $\sigma_{n,2} = o(1)$ (3.12)

अब रीमान-लेबेस्क प्रमेय[5] के द्वारा तथा निर्देश [2] में दी [F, dn] विधि के नियमित प्रतिबन्ध को ध्यान में रखने पर

$\sigma_{n,3} \to 0$ ज्यों-ज्यों $n \to \infty$. (3.13)

(3.2), (3.3), (3.12) तथा (3.13) को एकत्र करने से हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक बहुमूल्य सुझावों तथा मार्गदर्शन के लिए लेखक डा० के० सी० श्रीवास्तव के प्रति आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. हालैंड, ए० एस० बी०, साहनी, बी० एन० तथा जिम्बलारियो, जे०, Bollettino U. M. I. 1977, **14**-A, 126-130.
2. निरैकल, सी० एल०, **कनैडियन जर्न० मैथ०**, 1963, 503-525.
3. लार्च, एच० तथा न्यूमान, डी० जे०, Comm. Pure Appl. Math, 1962, **15**, 109-118.
4. रथ, पी० सी०, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1958, **25**, 125-130.
5. जिगमुंड, ए०, Trigonometrical Series. **चेल्सिया पब्लिसिंग** कम्पनी, न्यूयार्क, द्वितीय संस्करण 1952.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982 Pages, 337-345

$G_n^{\lambda}(x, s, p)$ बहुपदों का एक समुच्चय-I

आर० सी० तोमर तथा अरुणा श्रीवास्तव
गणित विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

[प्राप्त—जनवरी 27, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में सार्वीकृत बहुपदों $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ के एक नये वर्ग से परिचित कराया गया है और $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ के लिए जनक फलन, समाकल निरूपण, रूडिग्र सूत्र अनुरूप, पौन:पुनिक सम्बन्ध, सान्त संकलन सूत्र दिये गये हैं।

Abstract

On a set of polynomials G_n^{λ} (x, s, p)-I. By R. C. Tomar and Aruna Srivastava, Department of Mathematics, Delhi University, Delhi.

In the present paper we have introduced a class of generalized polynomials $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ and have given a general class of generating function, integral representation, Rodrigue formula analogue, recurrence relation, finite summation formulae for $G_n^{\lambda}(x, s, p)$.

1. विषय प्रवेश

बहुपद $G_n^{\lambda}(x)$ का प्रथम परिचय प्रभाकर[1] ने 1967 में दिया और इसका अध्ययन सुमन रेखा[2, 3] के सहयोग से आगे बढ़ा। उनके अनुसार $G_n^{\lambda}(x)$ को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x)\frac{t^n}{n!}=e^t(1-tx)^{\lambda}. \tag{1.1}$$

यहाँ पर बहुपद तन्त्र $G_n^{\lambda}(x, s, p)$ का अध्ययन करना रोचक होगा जिसे

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x, s, p)\frac{t^n}{n!}=e^{pt}(1-t^s x)^{\lambda}, \tag{1.2}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है जहाँ s कोई धन पूर्णांक है। स्पष्ट है कि $p=s=1$ होने पर (1.2) इसे (1.1) में समानीत कर देगा।

$G_n^{\lambda}(x, s, p)$ **के लिए हाइपरज्यामितीय रूप :**

(1.2) से हमें ज्ञात है कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x, s, p)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_k\, p^n\, t^{n+sk}\, x^k}{n!\, k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/s]}\frac{(-\lambda)_k\, p^{n-sk}\, x^k}{(n-sk)!\, k!},$$

जो दोनों पक्षों के t^n के गुणांकों को समीकृत करने पर

$$G_n^{\lambda}(x, s, p)=\sum_{k=0}^{[n/s]}\frac{(-\lambda)_k\, n!\, p^{n-sk}\, x^k}{(n-sk)!\, k!}$$

$$=p^n\sum_{k=0}^{[n/s]}\frac{(-\lambda)_k\,(-n)_{sk}\,((-1/p)^s x)^k}{k!}$$

$$=p^n\sum_{k=0}^{[n/s]}\frac{(-\lambda)_k \prod_{j=0}^{s-1}\left(\frac{-n+j}{s}\right)_k\left[\left(-\frac{s}{p}\right)^s x\right]^k}{k!}$$

प्रदान करता है अर्थात्

$$G_n^{\lambda}(x, s, p)=p^n\;{}_{s+1}F_0\left[-\lambda, \frac{-n}{s}, \ldots, \frac{-n+s-1}{s}; -; \left(\frac{-s}{p}\right)^s x\right]. \tag{1.3}$$

समाकल निरूपण तथा रूडिग्र अनुरूप : यदि हम सम्मिश्र चरों के फलनों के सिद्धान्त के लिए तर्क का व्यवहार करें तो (1.2) से हमें तुरन्त ही

$$G_n^{\lambda}\ (x, s, p)=\frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{e^{pt}\,(1-t^s\,x)^{\lambda}}{t^{n+1}}\,dt \tag{1.4}$$

प्राप्त होता है जहाँ $|t^s x|<1$ तथा C के वृत्त होने के कारण $|t|=r$ (लघु r के लिए)

(1.4) में t के स्थान पर $(u-x)$ रखने पर

$$G_n^{\lambda}\ (x, s, p)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{c'} \frac{e^{p(u-x)}\,[1-(u-x)^s\,x]^{\lambda}}{(u-x)^{n+1}}\,du$$

जहाँ c' एक वृत्त है $|u-x|=p$ (लघु p के लिए)

अथवा
$$G_n^{\lambda}\ (x, s, p)=e^{-xp}\ \frac{\partial n}{\partial u^n}[e^{pu}\,[1-(u-x)^s\,x]]_{u=x} \tag{1.5}$$

(1.5) ही $G_n^{\lambda}\ (x, s, p)$ का वांछित रूडिग्र अनुरूप है ।

2. जनक फलनों का एक वर्ग :

इस अनुभाग में हम निम्नलिखित जनक फलन प्राप्त करेंगे :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c)_n\ G_n^{\lambda}\ (x, s, p)\ \frac{t^n}{n!}$$

$$\cong(1-pt)^{-c}\ {}_{s+}{-}F_0\left[-\lambda,\ \frac{c}{s}, \ldots, \frac{c+s-1}{s};\ -;\ x\left(\frac{st}{1-pt}\right)^s\ \right], \tag{2.1}$$

जहाँ c एक याद्दच्छिक प्राचल है और $\cong$ से यह सूचित होता है कि श्रेणी $x\neq0$ के लिए अपसारी है ।

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c)_n\ G_n^{\lambda}\ (x, s, p)\ \frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/s]} \frac{(-\lambda)_k\,(c)_n\ \prod_{j=0}^{s-1}\left(\frac{-n+j}{s}\right)_k (-s/p)^{sk}\ x^k\ (pt)^n}{k!\ n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_k\,(c)_{n+sk}\,x^k\,t^{n+sk}\,p^n}{k!\,n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_k\,(c)_{sk}\,(xt^s)^k}{k!}\left[\frac{(c+sk)_n\,(pt)^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)_k\,(c)_{sk}\,(xt^s)^k}{k!}\,(1-pt)^{-(c+sk)}$$

$$=(1-pt)^{-c}\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)_k\prod_{j=0}^{s-1}\left(\frac{c}{s}\right)_k\left[x\left(\frac{st}{1-pt}\right)^s\right]^k$$

$$=(1-pt)^{-c}\;{}_{s+1}F_0\left[-\lambda,\frac{e}{s},\ldots,\frac{c+s-1}{s};-;x\left(\frac{st}{1-pt}\right)^s\right]^k.$$

3. **पौन:पुनिक घटना का सम्बन्ध :**

इस अनुभाग में हम (1.2) में परिभाषित बहुपद के लिए एक अवकल तथा दो विशुद्ध पौन:पुनिक सम्बन्धों की स्थापना करेंगे । ये सम्बन्ध हैं :

(i) $$G'^{\lambda}_{n}(x,s,p)=n_{ps}\,[x\,G'^{\lambda}_{n-s}(x,s,p)-\lambda\,G^{\lambda}_{n-s}(x,s,p)],\qquad(3.1)$$

(ii) $$G^{\lambda}_{n+1}(x,s,p)=p\;G^{\lambda}_{n}(x,s,p)$$

$$-n!\,\lambda s\sum_{r=0}^{[n/s]}G^{\lambda}_{n-rs-s+1}(x,s,p)\frac{x^{r+1}}{(n-rs-s+1)!},\qquad(3.2)$$

(iii) $$[G^{\lambda}_{n+1}(x,s,p)-p\;G^{\lambda}_{n}(x,s,p)]$$

$$=n_{ps}\,x\left[(1-\lambda s(n-s))\quad G^{\lambda}_{n-s+1}(x,s,p)\quad p\;G^{\lambda}_{n-s}\right],\ldots\qquad(3.3)$$

जहाँ $n_{ps}\quad\frac{n!}{(n-s)!}$ के लिए आया है ।

(3.1) की उपपत्ति : माना

$$F = F(x, t) = e^{pt}(1 - t^s x)^{\lambda}. \tag{3.4}$$

(3.4) को x के प्रति आंशिक रूप से अवकलित करने पर

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{pt}(-t^s \lambda)(1 - t^s x)^{\lambda - 1}$$

अथवा

$$(1 - t^s x)\frac{\partial F}{\partial x} = -\lambda t^s F. \tag{3.5}$$

(1.2) को व्यवहृत करने पर हम (3.5) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n'^{\lambda}(x, s, p)\frac{t^n}{n!} - x\sum_{n+0}^{\infty} G_n'^{\lambda}(x, s, p)\frac{t^{n+s}}{n!}$$

$$= -\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G_n^{\lambda}(x, s, p)\, t^{n+s}}{n!}. \tag{3·6}$$

(3.6) के दोनों पक्षों में t^n के गुणांकों को समीकृत करने पर हमें (3.1) मिलता है।

(3.2) की उपपत्ति :

(3.4) को t के प्रति आंशिकतः अवकलित करने पर

$$\frac{\partial F}{\partial t} = pF - \frac{\lambda s x\, t^{s-1}}{(1 - t^s x)}F \tag{3.7}$$

$$= pF - \lambda s x\, t^{s-1} F\sum_{r=0}^{\infty} t^{sr} x^r, \tag{3.8}$$

जो (1.2) को सम्प्रयुक्त करने पर निम्नलिखित प्रदान करता है :

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x, s, p)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = p\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda}(x, s, p)\frac{t^n}{n!}$$

$$-\lambda sx \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{[n/s]} G_{n-rs}^{\lambda} \quad (x, s, p) \frac{t^{n+s-1} x^r}{(n-rs)!}. \tag{3.9}$$

(3.9) के दोनों पक्षों में t^n के गुणांकों को समीकृत करने पर हमें (3.2) मिलता है।

(3.3) की उपपत्ति :

(3.7) को निम्न रूप में फिर से लिखने पर

$$(1-t^s x) \frac{\partial F}{\partial t} = p(1-t^s x) F - \lambda sx\, t^{s-1} F \tag{3.10}$$

जो निम्नलिखित के ही समान हैं :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n^{\lambda} (x, s, p)\, t^{n-1}}{(n-1)!} - x \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (x, s, p) \frac{t^{n+s-1}}{(n-1)!}$$

$$= p \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (x, s, p) \frac{t^n}{n!} - px \sum_{n=1}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (x, s, p) \frac{t^{n+s}}{n!}$$

$$-\lambda sx \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (x, s, p) \frac{t^{n+s-1}}{n!}. \tag{3.11}$$

(3.11) के दोनों पक्षों में t^n के गुणांकों को समीकृत करने पर हमें (3.3) मिलता है।

4. संकलन सूत्र :

इस अनुभाग में सर्वप्रथम हम $G_n^{\lambda} (x, s, p)$ के लिए निम्नलिखित दो सान्त संकलन सूत्र प्राप्त करेंगे।

(i) $$G_n^{\lambda} \ (xy, s, p) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(p(1-y))^{n-r}\, y^r}{r!\,(n-r)!} G_n^{\lambda} \left(\frac{x}{y^{s-1}}, s, p\right). \tag{4.1}$$

(ii) $$G_n^{\lambda} \ (x, s, p) = \left(\frac{x}{y}\right)^{n/s} \sum_{k=0}^{n} n_{ck}\, p^k\, G_{n-k}^{\lambda} (x, s, p) \left[\left(\frac{y}{x}\right)^{1/s} - 1\right]^k. \tag{4.2}$$

(4.1) की उपपत्ति : चूँकि

$$e^{pt} (1-t^s xy)^{\lambda} = e^{pyt} (e^{pt-pyt}) (1-t^s xy)^{\lambda}$$

$$= e^{pt(1-y)}\, e^{pyt} (1-t^s xy)^{\lambda}. \tag{4.3}$$

(1.2) को व्यवहृत करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (xy, s, p) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)^n p^n t^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(pyt)^2}{r!}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)_k (xy)^k t^{sk}}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)^n (pt)^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[r/s]} \frac{(-\lambda)_k x^k p^r y^{k+r-sk} t^r}{(r-sk)! \, k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)^n (pt)^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} G_r^{\lambda} \ \left(\frac{x}{y^{s-1}}, s, p\right) \frac{t^r y^r}{r!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{(1-y)^{n-r} p^{n-r} t^n y^r}{(n-r)! \, r!} G_r^{\lambda} \ \left(\frac{x}{y^{s-1}}, s, p\right),$$

जो t^n के गुणांकों को समीकृत करने पर (4.1) प्रदान करता है।

(4.2) की उपपत्ति :

(1.2) में t को हटाकर उसके स्थान पर $ty^{1/s}$ रखने पर

$$e^{pt \, y^{1/s}} (1-yt^s x)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (x; s; p) \frac{y^{n/s} t^n}{n!}. \tag{4.4}$$

(4.4) में x तथा y को विनिमय करने पर

$$e^{pt \, x^{1/s}} (1-t^s xy)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (y, s, p) \frac{x^{n/s} t^n}{n!}. \tag{4.5}$$

दक्षिण पक्ष का चरघातांकी फलन लेने के बाद (4.4) तथा (4.5) के वाम पक्ष को समीकृत करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\lambda} \ (x, s, p) \, y^{n/s} \frac{t^n}{n!} = e^{(y^{1/s}-x^{1/s})pt} \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} \ (y, s, p) \frac{x^{n/s} t^n}{n!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y^{1/s}-x^{1/s})^k (pt)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\lambda} (y, s, p)\, x^{n/s} \frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(y^{1/s}-x^{1/s})^k p^k x^{(n-k)/s} t^n}{(n-k)!\, k!} G_{n-k}^{\lambda} (y, s, p).$$

दो पक्षों में t^n के गुणांकों को समीकृत करने पर हमें वांछित फल (4.2) प्राप्त होता है।

$G_n^{\lambda} (x, s, p)$ वाली एक श्रेणी : (2.1) के वाम पक्ष को F द्वारा, $(st/1-pt)^s$ को $H(t)$ तथा $(1-tp)^{-c}$ को $A(t)$ द्वारा प्रदर्शित करने पर हम यह देखेंगे कि F निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों की तुष्टि करता है :

$$xt \frac{H'(t)}{H(t)} \frac{\partial F}{\partial x} - t \frac{\partial F}{\partial t} = -t \frac{A'(t)}{A(t)} F. \tag{4.6}$$

जो निर्देश[4] का सीधा परिणाम है और (2.1) के सम्प्रयोग से

$$xs\left[1+\sum_{n=0}^{\infty} p^{n+1} t^{n+1}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} (c)_n G'^{\lambda}_n (x, s, p) \frac{t^n}{n!}\right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n \cdot n}{n!} G_n^{\lambda} (x, s, p)\, t^n \right]$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} c\, p^{n+1} t^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (c)_n G_n^{\lambda} (x, s, p) \frac{t^n}{n!} \tag{4.7}$$

प्राप्त होता है। अथवा

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{n!} \left\{xs\, G'^{\lambda}_n (x, s, p) - n\, G^{\lambda}_n (x, s, p)\right\} t^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{n+1} (c)_k}{k!} [xs\ G'^{\lambda}_k (x, s, p) + C\ G_k^{\lambda} (x, s, p)]\, t^{n+k+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(c)_k\, p^{n-k}}{k!} [xs\ G'^{\lambda}_k (x, s, p) + c\ G_k^{\lambda} (x, s, p)]\, t^n,$$

जो t^n के गुणांकों की तुलना करने पर निम्नलिखित प्रदान करता है :

$$n\, G_n^{\lambda} (x, s, p) - x\, s\ G_n^{\lambda} (x, s, p)$$

$$=\frac{n!}{(c)_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(c)_k}{k!}\left[xs\ G_k'^{\lambda}(x, s, p)+C\ G_k^{\lambda}\ (x, s, p)\right]p^{n-k}. \tag{4.8}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा० टी० आर० प्रभाकर के अत्यन्त आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी के समय बहुमूल्य सुझाव दिये।

निर्देश

1. प्रभाकर, टी० आर० (अप्रकाशित)
2. प्रभाकर, टी० आर० तथा सुमन रेखा, जर्न० प्योर एप्लाइड मैथ० (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)
3. वही, The Math. Student (स्वीकृत)
4. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन, 1967.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 347-351

आंशिक समाकलन पर टिप्पणी

पी०सी० मुणेत तथा पी०ए० पद्मनाभम
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जनवरी 1, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य तीन चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों, G_C तथा G_D के लिए आंशिक समाकल निरूपण प्राप्त करना है।

Abstract

A note on fractional integration. *By* P. C. Munot and P.A. Padmanabham, Department of Mathematics, University of Jodhpur.

The aim of the present note is to obtain fractional integral representations of the three variable hypergeometric functions G_C and G_D. Dhawan [1] recently introduced these functions in continuation to the study of three variable hypergeometric functions G_A and G_B defined by Pandey [4].

1. प्रस्तावना

खण्डश: आंशिक समाकलन को एर्डेल्यी[2] ने इस प्रकार परिभाषित किया है

$$\int_a^b u \frac{\partial^v v}{\partial(b-x)^v}\, dx = \int_a^b v \frac{\partial^v u}{\partial(x-a)^v} dx \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ (1.1) में आए आंशिक व्युत्पन्न निम्नलिखित समाकलों द्वारा परिभाषित होते हैं

$$\frac{\partial^v u}{\partial(x-a)^v} = \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_a^x (x-y)^{-v-1} u(y) dy \qquad (1\cdot2)$$

तथा $$\frac{\partial^{v} v}{\partial(b-x)^{v}}=\frac{1}{\Gamma(-v)} \int_{x}^{b}(y-x)^{-v-1} v(y) dy \qquad (1\cdot3)$$

जहाँ $\mathrm{Re}(v)<0$

यदि प्रसार

$$U=\Sigma A_r(x-a)^{d+r-1},\ v=\Sigma B_s(b-x)^{c+s-1}$$

का अस्तित्व हो तो आंशिक व्युत्पन्नों को प्राप्त करने के लिए इन श्रेणियों को पदशः अवकलित करते हैं और सूत्र

$$\frac{\partial^{v} w^{\mu-1}}{\partial w^{v}}=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-v)} w^{\mu-v-1} \qquad (1\cdot4)$$

का उपयोग करते हैं जो $v \neq \mu$ होने पर सत्य उतरती है।

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य तीन चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों, G_C तथा G_D के लिए आंशिक समाकल निरूपण प्राप्त करना है। हाल ही में धवन[1] ने इन फलनों को पांडेय[4] द्वारा परिभाषित तीन चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों G_A तथा G_B का अध्ययन करते हुए प्राप्त किया।

G_C तथा G_D की परिभाषाएँ इस प्रकार हैं :

$G_C[\alpha,\beta_1,\beta_2;r;x,y,z]$

$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+p}(\beta_1)_{m+n}(\beta_2)_{n-p}}{(r)_{m+n-p}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^u}{n!} \frac{z^p}{p!} \qquad (1\cdot5)$$

जहाँ $|x|<1, |y|<1, |z|<1$

तथा $G_D[\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\,\beta_3{:}r;x,y,z]$

$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{p-m}(\alpha_2)_m(\beta_1)_m(\beta_2)_n(\beta_3)_p}{(r)_{n+p-m}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \qquad (1\cdot6)$$

जहाँ $|x|<1, |y|<1, |z|<1,$

जबकि सदैव की भाँति पोछामर संकेत $(a)_n$ को

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},\ n=0,1,2,\ \ldots$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

2. इस अनुभाग में हम निम्नलिखित समाकल निरूपण प्राप्त करेंगे —

$G_C\,[a,b',b;c;xz,yz,x/z]$

$$=\frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(n_3)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(n_1-a)\Gamma n_2-b)\Gamma(n_3-b')}\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1-s)^{n_1-a-1}$$

$$s^{a-1}(1-t)^{n_2-b-1}t^{b-1}(1-\mathrm{k})^{n_3-b'-1}k^{b'-1}\;G\left[n_1,n_2,n_3;c;xyst,yztk,\frac{sx}{kz}\right]ds\;dt\;dk \qquad (2\cdot1)$$

जो $0<Re(a)<Re(n_1)$, $0<Re(b)<Re(n_2)$, $0<Re(b')<Re(n_3)$ के लिए वैध हैं।

$G_C[a,b,b';c;xz,zy,x/zy]$

$$=\frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b')\Gamma(n_3)\Gamma(n_1-a)\Gamma(n_2-b')\Gamma(c-n_3)}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1-s)^{n_1-a-1}s^{a-1}(1-t)^{n_2-b'-1}(1-k)^{c-n_3-1}k^{n_3-1}$$

$$t^{b'-1}\;G_C\left(n_1,b,\,n_2;\,n_3;\,\mathrm{skxz},\,\mathrm{tkyz},\frac{sx}{tkyz}\right)ds\;dt\;dk \qquad (2\cdot2)$$

जो $0<Re(a)<Re(n_1)$, $0<Re(b)<Re(n_2)$, $0<Re(n_3)<Re(c)$ के लिए वैध है।

$G_D[a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c;\;1/x,y,xz]$

$$=\frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(n_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(n_1-a_1)\Gamma(n_2-b_2(\Gamma(n_3-b_3)}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1-s)^{n_1-a_1-1}s^{a_1-1}(1-t)^{n_2-b_2-1}t^{b_2-1}$$

$$(1-\mathrm{k})^{n_3-b_3-1}k^{b_3-1}G_D(n_1,a_2,b_1,n_2,n_3;c;\;1/\mathrm{sx},\;\mathrm{ty},\;\mathrm{skxz})\mathrm{ds\;dt\;dk} \qquad (2.3)$$

जो $0<Re(a_1)<Re(n_1)$, $0<Re(b_2)<Re(n_2)$, $0<Re(b_3)<Re(n_3)$ के लिए वैध हैं।

$G_D[a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c;\;1/\mathrm{zx},\;\mathrm{zy},\;\mathrm{zx}]$

$$=\frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_2)\Gamma(n_3)\Gamma(n_1-a_1)\Gamma(n_2-b_2)\Gamma(c-n_3)}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1-s)^{n_1-a_1-1} s^{a_1-1} (1-t)^{n_2-b_2-1} t^{b_2-1} (1-k)^{c-n_3-1}$$

$$k^{n_3-1} G_D[n_1,a_2,b_1,n_2,b_3;n_3;\ 1/skxz, tkyz, skxz]\, ds\, dt\, dk \tag{2·4}$$

जो $0<Re(a_1)<Re(n_1), 0<Re(b_2)<Re(n_2), 0<Re(n_3)<Re(c)$ के लिए वैघ हैं।

(2.1) की उपपत्ति : हम

$$\frac{\partial^{a-n_1+b-n_2+b'-n_3}}{\partial x^{a-n_1}\partial y^{b-n_2}\partial z^{b'-n_3}}\left(x^{a-1}y^{b-1}z^{b'-1}\ G_C\left(n_1,n_2,n_3;c;\ xy,yz,z/x\right)\right) \tag{2·5}$$

के सम्बन्ध में विचार करेंगे। (1·4) का सम्प्रयोग करने पर यह

$$=\frac{x^{n_1-1}y^{n_2-1}z^{n_3-1}\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(n_3)}G_C(a,b,b';c;xy,yz,x/z)$$

अतः (1·2) तथा (1·3) से यह अनुगमन होता है कि

$$\frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(n_3)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(n_1-a)\Gamma(n_2-b)\Gamma(n_3-b')}$$

$$\int_0^x\int_0^y\int_0^z (x-p)^{n_1-a-1}p^{a-1}(y-q)^{n2-b-1}q^{b-1}(z-u)^{n_3-b'-1}u^{b'-1}$$

$$G_C(n_1,n_2,n_3;c;pq,qu,p/u)\ dp\ dq\ du$$

$$=x^{n_1-1}y^{n_2-1}zn_3^{-1}G_C(a,b,b';c;\ xy,\ yz,\ x/z) \tag{2·6}$$

(2·6) में $p=sx$, $p=ty$ तथा $u=kz$ रखने पर (2·1) मिलता है।

सूत्र (2·2), (2·3) तथा (2·4) की उपपत्तियाँ (2·1) के ही समान हैं।

3. जब x अथवा y या z शून्य होता है तो पिछले अनुभाग में विवेचित त्रिगुण हाइपरज्यामितीय फलन या तो दो चरों वाले ऐपेल के चार हाइपरज्यामितीय फलनों में से किसी एक में या सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों में समानीत हो जाता है। इस प्रकार हमें एर्डेल्यी[2] तथा कोश्मीडर[3] के ज्ञात फल प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय प्रो० आर० एस० कुशवाहा के आभारी हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में उत्साहवर्धन किया।

निर्देश

1. धवन, जी०के०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इंडिया**, 1970, **40A**, 43-48
2. एर्डेल्यी, ए०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ०**, आक्सफोर्ड सिरीज, 1940, **11**, 293-303
3. कोश्मीडर, एल०, Acta Math., 1947, **79**, 241-254
4. पांडे, आर० सी०, Jour. of Math. and Mech. Indiana, 1963, **12**, (1), 113-118
5. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंघल, जे० पी०, Bull. Acad. Polon. Sci. Sci. Maths. Astro. Phys., 1972, **20**, 355-463.
6. श्रीवास्तव, एच० एम०, Math. Vesnek, 1972, **24**, 101-107

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 353-355

कैरिका पपाया में मुक्त ऐमीनो अम्ल अंश के परिप्रेक्ष्य में लैंगिकता

आर० सी० श्रीवास्तव तथा ए० बी० सिनहा

भारतीय वनस्पति सर्वेक्षण, इलाहाबाद तथा वनस्पति विभाग सेण्ट एण्ड्रूज कालेज, गोरखपुर

[प्राप्त—दिसम्बर 18, 1981]

सारांश

वर्तमान अध्ययन कैरिका पपाया एल० में पाये जाने वाले आक्षीर (latex) के मुक्त एमीनो अम्लों की मात्रा और सामान्य नर, मादा एवं असामान्य उभयलिंगी पादपों के विषय में किया गया है। इससे पता चला कि एलानीन, ग्लूटैमिक एसिड और फ़ेनिल एलानीन नर के, हाइड्राक्सी प्रॉलीन और प्रॉलीन मादा के तथा आर्जीनीन, एस्पार्टिक एसिड और मेथियोनीन उभयलिंगी पौधों के लक्षण हैं।

Abstract

Sexuality in relation to free amino acid content in carica papaya *L. By* R.C. Srivastava and A.B. Sinha, Department of Botany, St. Andrews College, Gorakhpur.

The study deals with the relationship between the free aminoacid contents of the latex and sexuality of nomal male, female and abnormal monoecious plants of **carica papaya.** It showed that alamine, glutamic acid and phenyl alanine are characteristics of male, hydroxyproline, proline of the female and arginine, aspartic acid and methionine of the monoecious plants.

कैरिका पपाया एल० एक प्रारूपिक एकलिंगी पादप है किन्तु अपवादस्वरूप इसके कुछ उभयलिंगी रूप भी मिलते हैं जिनमें नर और मादा दोनों प्रकार के पुष्प एक ही पादप पर या एक ही पुष्पक्रम में पाये जाते हैं। दूधिया आक्षीर इस पौधे का विशिष्ट लक्षण है जो इसकी पत्तियों, तने, पुष्पों एवं फलों की आक्षीर कोशिकाओं में पाया जाता है। इसके आक्षीर में अनेक पॉलीसैकराइड एवं ऐमीनो अम्ल (मुक्त एवं संयुक्त दोनों प्रकार के) पाये जाते हैं। इसके अतिरिक्त एक सक्रिय पदार्थ पपैन (papain) भी पाया जाता है जिसका अत्यधिक आर्थिक और औषधीय महत्व है। प्रस्तुत अध्ययन में **कैरिका पपाया**

पादपों के नर, मादा और उभयलिंगी पादपों के आक्षीर में प्राप्य मुक्त ऐमीनो अम्लों और पौधों की लैंगिकता के बीच किसी प्रकार के संबंध की सम्भावना का पता लगाने का प्रयास किया गया है।

प्रयोगात्मक

उपरोक्त नर, मादा एवं उभयलिंगी सभी प्रकार के पौधों के परिपक्व पुष्पों की कलियों से 0·1 मिलीलीटर आक्षीर लेकर उसे पूरे आकार के अलग-अलग क्रोमेटोग्राफिक पेपर के ऊपर सीधे अंकित किया गया और विद्यमान मुक्त एमीनो अम्लों को द्विआयामी क्रोमेटोग्राफिक विधि से देखा गया। इसमें फिनाल : जल (1 : 1 v/v) एवं बुटैनोल : एसिटिक एसिड : जल (3 : 1 : v/v) को विलायक तथा एसीटोन में 0·2% निनहाइड्रिन घोल को डेवलेपर के रूप में प्रयुक्त किया गया। विभिन्न क्रोमेटोग्राफों में जिसमें एक मानक क्रोमेटोग्राफ भी था निनहाइड्रिन धनात्मक धब्बों के आर० एफ० (Rf.) मानों की तुलना में एमीनो अम्लों की पहचान की गई। इसके परिणाम सारणी-1 में अंकित हैं।

सारणी-1

कैरिका पपाया एल० के नर, मादा और असामान्य उभयलिंगी पादपों के आक्षीर में उपस्थित मुक्त एमीनोअम्ल

मुक्त ऐमीनो अम्ल	केवल नर पुष्पों वाले सामान्य पौधे	केवल मादा पुष्पों वाले सामान्य पौधे	नर, मादा दोनों प्रकार के पुष्पों से युक्त असामान्य पादप
आर्जीनीन	—	—	++
एलानीन	+++	—	—
एस्पार्टिक अम्ल	—	—	+
सिस्टीन	+++	+++	+++
ग्लूटैमिक अम्ल	++	—	—
हिस्टिडीन	+++	+++	+++
हाइड्राक्सी प्रोलीन	—	++	—
आइसोल्यूसीन	—	++	+++
मेथियोनीन	—	—	++
फ़ेनिलएलानीन	++	—	—
प्रोलीन	—	++	—
ट्रायरोसीन	++	++	++
वैलीन	—	—	+++

+++ धब्बे का आकार 4—5 से०मी० ×1—1·5 से०मी०

++ धब्बे का आकार 2—4 से०मी० ×0·5—1 से०मी०

\+ धब्बे का आकार 1—2 से०मी० ×0·5 से०मी० या कम

— नहीं देखा जा सका।

परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त परिणाम (सारणी-1) यह सिद्ध करते हैं कि सिस्टीन, हिस्टिडीन, एवं टायरोसीन हर लिंग वाले पौधों के आक्षीर में लगभग समान मात्रा में पाये जाते हैं जिससे यह संकेत मिलता है कि इनका पौधों की लैंगिकता से कोई संबंध नहीं है। इसके विपरीत एलानीन, ग्लूटैमिक अम्ल एवं फ़ेनिल एलानीन केवल नर पादपों के आक्षीर में; हाइड्राक्सीप्रोलीन एवं प्रोलीन केवल मादा पादपों में और आर्जीनीन, एस्पार्टिक एसिड एवं मेथियोनीन केवल उभयलिंगी (असामान्य) पौधों में पाये जाते हैं और यह सिद्ध करते हैं कि उनकी **कैरिका पपाया** पादपों के लिंग निर्धारण में विशेष भूमिका है। आइसोल्यूसीन एवं वैलीन की उपस्थिति मादा और उभयलिंगी दोनों ही प्रकार के पादपों के आक्षीर में पाई गई यद्यपि उनकी मात्रा में अंतर था। साथ ही नर पादपों के आक्षीर में इनकी अनुपस्थिति यह भी संकेत करती है कि इन अम्ल का पौधों के मादा लक्षणों से विशेष संबंध है। ऐसा कोई भी एमीनो अम्ल नहीं देखा गया जो नर एवं उभयलिंगी दोनों ही प्रकार के पादपों में पाया जाता हो। यह भी स्पष्ट हुआ कि नर की अपेक्षा उभयलिंगी पादपों के आक्षीर में मुक्त एमीनो अम्ल की संख्या अधिक होती है। निम्नतम संख्या 6 नर पादपों में तथा अधिकतम 8 उभयलिंगी पादपों में पायी जाती है जबकि मादा पौधों में मुक्त एमीनो अम्ल की संख्या 7 है। इस प्रकार यह तथ्य प्रकाश में आया कि पादपों का लिंग न केवल किसी विशेष एमीनो अम्ल की उपस्थिति पर आधारित है बल्कि किसी पादप में विद्यमान इन मुक्त एमीनो अम्लों की संख्या की भी इस लिंग निर्धारण में विशेष भूमिका है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रधानाचार्य डा० आर० एस० श्रीवास्तव द्वारा प्रदत्त सुविधाओं और डा० आर० सहाय द्वारा दिये गये सुझावों के लिए उनके आभारी हैं।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 357-370

तीनों चरों वाला सर्वाधिक सार्वीकृत फाक्स का H-फलन II

प्रमिला बापना तथा ए०एन० गोयल

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त – अगस्त 26, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में तीन चरों वाले सार्वीकृत फलन द्वारा तुष्ट आंशिक अवकल समीकरण दिये गये हैं। इन समीकरणों का उपयोग लारीसेला की तरह के अनेक सार्वीकृत फलनों को परिभाषित करने के लिए किया गया है।

Abstract

On a most generalized Fox H-Function of three variables-(II). *By* Pramila Bapna and A.N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

Partial differential equations satisfied by the generalized function of three variables are given. These equations are used to define a number of generalized functions of the Lauricella's type.

1.1 परिभाषा

बापना तथा गोयल[1] ने तीन चरों वाले सार्वीकृत फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है :

$$H^*\left[\begin{array}{l|l|l}\begin{bmatrix}m,0\\p,q\end{bmatrix} & \left[((A_p;\alpha_p^{t_1},\alpha_p^{t_2},\alpha_p^{t_3}));((B_q;\beta_q^{t_1},\beta_q^{t_2},\beta_q^{t_3}))\right] & x_1\\ \left\{\begin{bmatrix}M_k,0\\P_k,Q_k\end{bmatrix}\right\}_{k=1,2,3} & \left\{((E_{P_k}^{(k)};\lambda_{P_k}^{(k)},\lambda'^{(k)}_{P_k}));((F_{P_k}^{(k)};\mu_{Q_k}^{(k)},\mu'^{(k)}_{Q_k}))\right\} & x_2\\ \begin{pmatrix}((m_k,n_k))\\((p_k,q_k))\end{pmatrix}_{k=1,2,3} & \left(((C_{p_k}^{(k)};\gamma_{p_k}^{(k)}));((D_{q_k}^{(k)};\delta_{q_k}^{(k)}))\right) & x_3\end{array}\right]$$

$$\equiv\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3}\psi\left(\sum_{k=1}^{3}s_k\right)G(s_1+s_2,s_2+s_3,s_3+s_1)$$

$$\prod_{k=1}^{3}[\phi(s_k)\cdot x^{s_k}\,ds_k] \tag{1.1.0}$$

जहाँ

$$\psi\left(\sum_{k=1}^{3}s_k\right)=\frac{\prod^{m}\Gamma\left(A_j+\sum_{k=1}^{3}\alpha_j^{t_k}s_k\right)}{\prod_{1+m}^{p}\Gamma\left(1-A_j-\sum_{k=1}^{3}\alpha_j^{t_k}s_k\right)\prod^{q}\Gamma(B_j+\Sigma\,\beta_j^{t_k}s_k)} \tag{1.1.1}$$

$$\phi(s_k)=\frac{\prod^{m_k}(1-C_j^{(k)}+\gamma_j^{(k)}s_k)\prod^{n_k}\Gamma(D_j^{(k)}-\delta_j^{(k)}s_k)}{\prod_{1+m_k}^{p_k}\Gamma(C_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)}s_k)\prod_{1+n_k}^{q}\Gamma(1-D_j^{(k)}+\delta_j^{(k)}s_k)} \tag{1.1.2}$$

$$G(s_1+s_2,s_2+s_3,s_3+s_1)=\frac{\prod^{M_1}\Gamma(E_j^{(1)}+\lambda_j^{(1)}s_1+\lambda'^{(1)}_j s_2)}{\prod_{1+M_1}^{P_1}\Gamma(1-E_j^{(1)}-\lambda_j^{(1)}s_1-\lambda'^{(1)}_j s_2)}$$

$$\frac{\prod^{M_2}\Gamma(E_j^{(2)}+\lambda_j^{(2)}s_2+\lambda_j^{(2)}s_3)}{\prod^{Q_1}\Gamma(F_j^{(1)}+\mu_j^{(1)}s_1+\mu'^{(1)}_j s_2)\prod_{1+M_2}^{P_2}\Gamma(1-E_j^{(2)}-\lambda_j^{(2)}s_2-\lambda'^{(2)}_j s_3)}$$

$$\frac{\prod^{M_3} \Gamma(E_j^{(3)}+\lambda_j^{(3)}\, s_3+\lambda'^{(3)}_j\, s_1)}{\prod^{Q_2} \Gamma(F_j^{(2)}+\mu_j^{(2)}\, s_2+\mu'^{(2)}_j\, s_3) \prod_{1+M_3}^{P_3} \Gamma(1-E_j^{(3)}-\lambda_j^{(3)}-\lambda_j^{(3)}\, s_3-\lambda'^{(3)}_j\, s_1)}$$

$$\times \prod^{Q_3} \Gamma(F_j^{(3)}+\mu_j^{(3)}\, s_3+\mu'^{(3)}_j\, s_1) \tag{1.1.3}$$

$((A_p, \alpha_p))$ से अनुक्रम (A_1, α_1) (A_2, α_2) ... (A_p, α^p) का सूचन होता है। संख्यायें m, m_k, M_k, n_k $p, q, p_k, q_k, P_k, Q_k, (k=1, 2, 3)$ निम्नलिखित असमिकाओं की तुष्टि करती हैं :

$$0 \leqslant m \leqslant p;\ 0 \leqslant_k \leqslant p_k;\ 0 \leqslant M_k \leqslant P_k;\ 0 \leqslant n_k \leqslant q_k;\ q_k;\ q \geqslant 0;\ q_k \geqslant 1;\ Q_k \geqslant 1.$$

इसमें से $x_k=0$ $(k=1, 2, 3)$ मानों को निकाल दिया गया है। कंटूर $L_k(k=1, 2, 3)$ S_k- तल पर है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त रहा जा सके कि

$\Gamma(D_j^{(k)}-\delta_j^{(k)}\, s_k), j=1, ..., n_k$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा

$\Gamma(1-C_j^{(k)}+\gamma_j^{(k)}\, s_k), j=1, ..., m_k, \Gamma(A_j+\sum_{k=1}^{3} \alpha_j^{t_k}\, s_k), j=1, ..., m$

तथा $\Gamma(E_j^{(1)}+\lambda_j^{(1)}+\lambda'^{(1)}_j\, s_2)\, j=1, ..., M_1; \Gamma(E_j^{(2)}+\lambda_j^{(2)}\, s_2+\lambda'^{(2)}_j\, s_3), j=1, ..., M_2,$

$\Gamma(E_j^{(3)}+\lambda_j^{(3)}\, s_3+\lambda'^{(3)}_j\, s_1), j=1, ..., M_3$

के पोल उसके बाईं ओर पड़ें।

1.2 अभिसरण प्रतिबन्ध

जैसा कि जैंन तथा गोयल[2] ने $H(x, y, z)$ के लिए किया है उसी का अनुसरण करते हुए हमें अभिसरण के निम्नलिखित प्रतिबन्ध प्राप्त होते हैं। यहाँ यह स्मरण रखना होगा कि समस्त ग्रीक अक्षर $\alpha', \beta', \gamma', \lambda'$ एवं μ' भी संमिश्र हैं।

(i) $|\arg x_k|=|\phi_k|<\left(W''_5+\frac{W'_1}{2}-\frac{W'_2}{2}\right)\pi;$

तथा $2W'_5+W'_1>W'_2$

(ii) $W''_3+W'_6>W''_4+W'_1$

(iii) $W_1'' > W_2''$;

जहाँ $W_1' = \overset{p}{\Pi} (a_j^{tk})' + \overset{p_k}{\Sigma} (\gamma_j^k)' + \overset{P_k}{\Sigma} (\lambda_j^k)'$

$W_2' = \overset{p}{\Sigma} (\beta_j^{tk})' + \overset{q_k}{\Sigma} (\delta_j^k)' + \overset{Q_k}{\Sigma} (\mu_j^k)'$

$W_3' = \overset{p}{\Sigma} (a_j^{tk})' \log |a_j^{tk}| + \overset{p_k}{\Sigma} (\gamma_j^k)' \log |\gamma_j^k| + \overset{P_k}{\Sigma} (\lambda_j^k)' \log |\lambda_j^k|$

$W_4' = \overset{q}{\Sigma} (\beta_j^{tk})' \log |\beta_j^{tk}| + \overset{q_k}{\Sigma} (\delta_j^k)' \log |\delta_j^k| + \overset{Q_k}{\Sigma} (\mu_j^k)' \log |\mu_j^k|$

$W_5' = \overset{nk}{\Sigma} |(\delta_j^k)'| - \sum_{1+m}^{p} |(a_j^{tk})'| - \sum_{1+m_k}^{p} |(\gamma_j^k)'| - \sum_{1+M_k}^{P_k} |(\lambda_j^k)'|$

$W_6' = \overset{p}{\Sigma} (a_j^{tk})' \psi_j^k + \overset{p_k}{\Sigma} (\gamma_j^k)' A_j^k + \overset{P_k}{\Sigma} (\lambda_j^k)' R_j^k$

$W_7' = \overset{q}{\Sigma} (\beta_j^{tk})' F_j^k + \overset{q_k}{\Sigma} (\delta_j^k)' P_j^k + \overset{P_k}{\Sigma} (\mu_j^k)' T_j^k$

$\psi_j^k = \text{amp}\ (a_j^{tk}),\ A_j^k = \text{amp}\ (\gamma_j^k),\ P_j^k = \text{amp}\ \delta_j^k,\ F_j^k = \text{amp}\ \beta_j^{tk},$

$R_j^k = \text{amp}\ \lambda_j^k,\ T_j^k = \text{amp}\ \mu_j^t.$

$W_1'', W_2'', \ldots, W_7''$ को एक डैश के बजाय दो डैश लगाकर प्राप्त किया जाता है।

$a_j^{tk} = (a_j^{tk})' + i\,(a_j^{tk})''$. इसी प्रकार $\beta_j^{tk} = (\beta_j^{tk})' + i\,(\beta_j^{tk})''$

तथा अन्य भी।

1.3 आंशिक अवकल समीकरण

माना कि W(1.1.0) के दक्षिण पक्ष को सूचित करता है। हम

$x_1 \frac{\delta}{\delta x_1}$, $x_2 \frac{\delta}{\delta x_2}$, $x_3 \frac{\delta}{\delta x_3}$ को क्रमशः θ, ϕ तथा ψ के द्वारा अंकित करेंगे और यह कल्पना करेंगे कि

$$\alpha_j^{t_k}\ (j=1, ..., p);\ \beta_j^{t_k}\ (j=1, ..., q)$$

$$\gamma_j^{(k)}\ (j=1, ..., p_k);\ \delta_j^{(k)}\ (j=1, ..., q_k)$$

$$\lambda_j^{(k)},\ \lambda'^{(k)}_j\ (j=1, ..., P_k);\ \mu_j^{(k)},\ \mu'^{(k)}_j\ (j=1, ..., Q_k)$$

$$[k=1, 2, 3]$$

सभी पूर्ण संख्याएं हैं। W द्वारा तुष्ट आंशिक अवकल समीकरणों को निम्न प्रकार से दिया जाता है।

$$\{(-1)^{W_1} x_1 \prod^{p} (\alpha_j^{t_1}\theta+\alpha_j^{t_2}\phi+\alpha_j^{t_3}\psi+A_j)_{\alpha_j^{t_1}} \prod^{P_1} (E_j^{(1)}+\lambda_j^{(1)}\theta+\lambda'^{(1)}_j\phi)_{\lambda_j^{(1)}}$$

$$\prod^{P_3} (E_j^{(3)}+\lambda_j^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}_j\theta)_{\lambda'^{(3)}_j} \prod^{p_1} (1-C_j^{(1)}+\gamma_j^{(1)}\theta)_{\gamma_j^{(1)}}$$

$$\prod^{q} (B_j+\beta_j^{t_1}\theta+\beta_j^{t_2}\phi+\beta_j^{t_3}\psi-\beta_j^{t_1})_{\beta_j^{t_1}} \prod^{Q_1} (F_j^{(1)}+\mu_j^{(1)}\theta+\mu'^{(1)}_j\phi-\mu_j^{(1)})_{\mu_j^{(1)}}$$

$$\prod^{Q_3} (F_j^{(3)}+\mu_j^{(3)}+\mu'^{(3)}_j\theta-\mu'^{(3)}_j)_{\mu'^{(3)}_j} \prod^{q_1} (1-D_j^{(1)}-\delta_j^{(1)}+\delta_j^{(1)}\theta)_{\delta_j^{(1)}}\} W$$

$$=0 \tag{1.3.1}$$

$$\{(-1)^{W_2} x_2 \prod^{p} (\alpha_j^{t_1}\theta+\alpha_j^{t_2}\phi+\alpha_j^{t_3}\psi+A_j)_{\alpha_j^{t_2}}$$

$$\prod^{P_1} (E_j^{(1)}+\lambda_j^{(1)}\theta+\lambda'^{(1)}_j\phi)_{\lambda'^{(1)}_j} \prod^{P_2} (E_j^{(2)}+\lambda_j^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}_j\psi)_{\lambda_j^{(2)}}$$

$$\prod^{p_2} (1-C_j^{(2)}+\gamma_j^{(2)}\phi)_{\gamma_j^{(2)}} - \prod^{q} (B_j+\beta_j^{t_1}\theta+\beta_j^{t_2}\phi+\beta_j^{t_3}\psi-\beta_j^{t_2})_{\beta_j^{t_2}}$$

$$\prod^{Q_1} (F_j^{(1)}+u_j^{(1)}\theta+1\mu_j^{(1)}\phi+\mu'^{(2)}_j\psi-\mu_j^{(1)})_{\mu_j^{(1)}}$$

$$\prod^{Q_2} (F_j^{(2)}+\mu_j^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}_j\psi-\mu_j^{(2)})_{\mu_j^{(2)}} \prod^{q_2} (1-D_j^{(2)}-\delta_j^{(2)}+\delta_j^{(2)}\phi)_{\delta_j^{(2)}}\} W$$

$$=0 \tag{1.3.2}$$

$$\{(-1)^{W_3} x_3 \prod^{p} (\alpha_j^{t_1}\ \theta+\alpha_j^{t_2}\ \phi+\alpha_j^{t_3}\ \psi+A_j)_{\alpha_j^{t_3}}$$

$$\prod^{P_2} (E_j^{(2)}+\lambda_j^{(2)}\ \phi+\lambda'^{(2)}_j\ \psi)_{\lambda'^{(2)}_j} \prod^{P_3} (E_j^{(3)}+\lambda_j^{(3)}\ \psi+\lambda'^{(3)}_j\ \theta)_{\lambda_j^{(3)}}$$

$$\prod^{P_3} (1-C_j^{(3)}+\gamma)_{\gamma_j^{(3)}} - \prod^{q} (B_j+\beta_j^{t_1}\ \theta+\beta_j^{t_2}\ \phi+\beta_j^{t_3}\ \psi-\beta_j^{t_3})_{\beta_j^{t_3}}$$

$$\prod^{Q_2} (F_j^{(2)}+\mu_j^{(2)}\ \phi+\mu'^{(2)}_j\psi-\mu'^{(2)}_j\ -\mu'^{(2)}_j)_{\mu'^{(2)}_j} \prod^{Q_3} (F_j^{(3)}+\mu_j^{(3)}\ \psi+\mu'^{(3)}_j\ \theta-\mu_j^{(3)})_{\mu_j^{(3)}}$$

$$\prod^{q_3} (1-D_j^{(3)}-\delta_j^{(3)}+\delta_j^{(3)}\ \psi)_{\delta_j^{(3)}}\}W=0 \tag{1.3.3}$$

जहाँ

$$W_1=\sum_{1+m}^{p}\ \alpha_j^{t_1}+\sum_{1+M_1}^{P_1}\lambda_j^{(1)}+\sum_{1+M_3}^{P_3}\lambda'^{(3)}_j+u_1;$$

$$W_2=\sum_{1+m}^{p}\alpha_j^{t_2}+\sum_{1+M_1}^{P1}\ \lambda'^{(1)}_j+\sum_{1+M_2}^{P_2}\lambda_j^{(2)}+u_2;$$

$$W_3=\sum_{1+m}^{p}\alpha_j^{t_3}+\sum_{1+M_2}^{P_2}\lambda'^{(2)}_j+\sum_{1+M_2}^{P_2}\lambda_j^{(3)}+u_3;$$

$$u_k=\sum_{m_k+1}^{p_k}\gamma_j^{(k)}-\sum^{n_k}\delta_j^{(k)}\ [k=1, 2, 3]$$

$(\alpha)_r=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ \dots\ (\alpha+r-1)$ तथा $(\alpha)_0=1$.

(1.3.1) को प्राप्त करने के लिए हम W पर इस प्रकार संक्रिया करेंगे

$$\prod^{p} (\alpha_j^{t_2}\ \theta+\alpha_j^{t_2}\ \phi+\alpha_j^{t_3}\ \psi+A_j)_{\alpha_j^{t_1}} \prod^{P_1} (E_j^{(1)}+\lambda_j^{(1)}\ \theta+\lambda'^{(1)}_j)_{\lambda_j^{(1)}}$$

$$\prod^{P_3} (E_j^{(3)}+\lambda_j^{(3)}\ \psi+\lambda'^{(3)}_j\ \theta)_{\lambda'^{(3)}} \prod^{p_1} (1-C_j^{(1)}+\gamma_j^{(1)}\ \theta)_{\gamma_j^{(1)}}$$

तो निम्नलिखित सम्बन्धों की सहायता से

$$\Gamma(z+r) = (-1)^r (1-z-r)_r \, \Gamma z, \; \Gamma(1-z-r) = \frac{\Gamma(1-z)}{(1-z-r)_r}, \; \Gamma(z-r)(z-r)_r = \Gamma z$$

तथा थोड़े किन्तु लम्बे एवं जटिल सरलीकरण तथा समंजन के पश्चात् हमें (1.3.1) का वाम पक्ष प्राप्त होता है।

1.4 विशिष्ट दशाएं

(i) यदि हम (1.3.1) से (1.3.3) तक को क्रमशः

$$m=p=1, q=0, A_1=a, X_1=\mathbf{X}, X_2=Y, X_3=\mathbf{Z}, \tag{1.4.1}$$

$$q_k=2, \; D_j^{(k)}=0, \; \delta_j^{(k)}=1, \; D_j^{(k)}=1-c_k, \; \delta_j^{(k)}=\delta^{(k)}, \; n_k=0, \quad \forall k=1,2,3 \tag{1.4.2}$$

$$P_k=Q_k=0, \; m_k=p_k=1, \; C^{(k)}=1-b_k \quad k=1,2,3,$$

लिखें तो लारीसेला के सार्वीकृत F_A^* फलनों द्वारा आंशिक अवकल समीकरणों की तुष्टि होती है।

$$[x(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_1}}(b_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}-(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]\,F_A^*=0.$$

$$[y(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_2}}(b_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}}-(c_2+\delta^{(2)}\phi-\delta^{(2)})_{\delta^{(2)}}\phi]=0$$

$$[z(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_3}}(b_3+\gamma^{(3)}\psi)_{\gamma^{(3)}}-(c_3+\delta^{(3)}\psi-\delta^{(3)})_{\delta^{(3)}}\psi]\,F_A^*=0$$

(ii) यदि हम (1.3.2) से (1.3.3) तक को क्रमशः

$$X_1=X. \; X_2=Y, \; X_3=Z,$$

$$q_k=1, \; D_1^{(k)}=0, \; \delta_1^{(k)}=1, \; m=p=0, \; q=1, \; B_1=c_1, \; n_K=0 \quad \forall k=1,2,3 \tag{1.4.3}$$

$$P_k=Q_K=0, \; m_k=p_k=2, \; C_1^{(k)}=1-a_k, \; C_2^{(k)}=1-b_k \; \forall k=1,2,3$$

लिखें तो लारीसेला के सार्वीकृत F_B^* फलनों द्वारा तुष्ट आंशिक अवकल समीकरणों की प्राप्ति होती है।

$$[x(a_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}(b_1+\gamma'^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_1})_{\beta^{t_1}}\theta]F_B^*=0$$

$$[y(a_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}}(b_2+\gamma'^{(2)}\phi)_{\gamma'^{(2)}}-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_2})_{\beta^{t_2}}\phi]F_B^*=0$$

$$[z(a_3+\gamma^{(3)}\psi)_{\gamma^{(3)}}(b_3+\gamma'^{(3)}\psi)_{\gamma'^{(3)}}-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_3})_{\beta^{t_3}}\psi]F_B^*=0$$

(iii) यदि हम (1·3.1) से (1·3.3) तक को क्रमशः

$$X_1=X,\ X_2=Y,\ X_3=Z, \tag{1.4.2}$$

तथा $m=p=2,\ q=0,\ A_1=a,\ A_2=b,\ P_k=Q_k=0$

रखें तो लारीसेला के F_C^* सार्वीकृत द्वारा तुष्ट आंशिक अवकल समीकरणों की प्राप्ति होती है।

$$[x(a+\alpha_1^{t_1}\theta+\alpha_1^{t_2}\phi+\alpha_1^{t_3}\psi)_{\alpha_1^{t_1}}(b+\alpha_2^{t_1}\theta+\alpha_2^{t_2}\phi+\alpha_2^{t_3}\psi)_{\alpha_2^{t_1}}$$

$$-(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]\ F_C^*=0$$

$$[y(a+\alpha_1^{t_1}\theta+\alpha_1^{t_2}\phi+\alpha_1^{t_3}\psi)_{\alpha_1^{t_2}}(b+\alpha_2^{t_1}\theta+\alpha_2^{t_2}\phi+\alpha_2^{t_3}\psi)_{\alpha_2^{t_2}}$$

$$-(c_2+\delta^{(2)}\phi-\delta^{(2)})_{\delta^{(2)}}\phi]\ F_C^*=0$$

$$[z(a+\alpha_1^{t_1}\theta+\alpha_1^{t_2}\phi+\alpha_1^{t_3}\psi)_{\alpha_1^{t_3}}(b+\alpha_2^{t_1}\theta+\alpha_2^{t_2}\phi+\alpha_2^{t_3}\psi)_{\alpha_2^{t_3}}$$

$$-(c_3+\delta^{(3)}\psi-\delta^{(3)})_{\delta^{(3)}}\psi]\ F_C^*=0$$

(iv) यदि हम (1·3·1), (1.3.2) तथा (1·3·3) में

$X_1=X,\ X_2=Y,\ X_3=Z,$

$m=p=q=1,\ A_1=a,\ B_1=c,\ P_k=Q_k=0,$

$q_k=m_k=p_k=1,\ C^{(k)}=1-b_k,\ D_1^{(k)}=0,\ \delta_1^{(k)}=1$

$\forall k=1,2,3$

रखें तो हमें जो आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं उनकी तुष्टि लारीसेला के सार्वीकृत F_D^* फलन द्वारा होती है

$$[x(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_1}}(b_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}$$

$$-(c+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_1})_{\beta t_1}\theta]\,F_D{}^*=0$$

$$[y(a+\alpha^{t_1}\theta+\sigma^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_2}}(b_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}}$$

$$-(c+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_2})_{\beta t_2}\phi]\,F_D{}^*=0$$

$$[z(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\sigma^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_3}}(b_3+\gamma^{(3)}\psi)_{\gamma^{(3)}}$$

$$-(c+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_3})_{\beta t_3}\psi]\,F_D{}^*=0$$

(v) यदि हम (1·3·1) से (1·3·3) तक में (1.4.1), (1.4.2) तथा $A_1=a$

$$P_1=P_3=Q_1=Q_2=Q_3=0,\ M_2=P_2=1,\ E_1^{2}=b_2, \qquad (14.3)$$

$$m_1=p_1=1,\ C_1^{1}=1-b_1,\ p_2=p_3=0$$

रखें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होगा जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत $F_E{}^*$ फलन द्वारा होती है।

$$[x(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_1}}(b_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}$$

$$-(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]F_E{}^*=0$$

$$[y(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_3}}(b_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda^{(2)}}$$

$$-(c_2+\delta^{(2)}\phi-\delta^{(2)})_{\delta^{(2)}}\phi]\,F_E{}^*=0.$$

$$[z(a+\alpha^{t_1}\theta+\alpha^{t_2}\phi+\alpha^{t_3}\psi)_{\alpha^{t_3}}(b_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)})_{\lambda'^{(2)}}$$

$$-(c_3+\delta^{(3)}\psi-\delta^{(3)})_{\delta^{(3)}}\psi]\,F_E{}^*=0$$

(vi) यदि हम (1·3·1) से (1·3·3) तक में (1.4.1) तथा $A_1=a$

$$P_1=P_2=Q_1=Q_3=0,\ M_3=P_3=1,\ E_1^{(3)}=b_1 \qquad (1.4.4)$$

$$Q_2=1,\ F_1^{(2)}=c_2,\ q_1=2,\ q_2=q_3=1,\ D_1^{(k)}=0,\ \delta_1^{(k)}=1,$$

$$D_2^{(k)}=1-c,\ \delta_2^{(1)}=\delta^{(1)}\ n_k=0,\ \forall k=1,\ 2,\ 3$$

$$p_1=p_3=0,\ m_2=p_2=1,\ C^{(2)}=1-b_2 \qquad (1.4.5)$$

रखें तो हमें एक आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत F_F^* फलन द्वारा होती है ।

$$[x(a+\alpha^{t_1}\ \theta+\alpha^{t_2}\ \phi+\alpha^{t_3}\ \psi)_{\alpha^{t_1}}\ (b_1+\lambda^{(3)}\ \psi+\lambda'^{(3)}\ \theta)_{\lambda'^{(3)}}$$
$$-(c_1+\delta^{(1)}\ \theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\ \theta]\ F_F^*=0$$

$$[y(a+\alpha^{t_1}\ \theta+\alpha^{t_2}\ \phi+\alpha^{t_3}\ \psi)_{\alpha^{t_2}}(b_2+\gamma^{(2)}\ \phi)_{\gamma^{(2)}}$$
$$-(c_2+\mu^{(2)}\ \phi+\mu'^{(2)}\ \psi-\mu^{(2)})_{\mu^{(2)}}\ \phi]\ F_F^*=0$$

$$[z(a+\alpha^{t_1}\ \theta+\alpha^{t_2}\ \phi+\alpha^{t_3}\ \psi)_{\alpha^{t_3}}\ (b_1+\lambda^{(3)}\ \psi+\lambda'^{(3)}\ \theta)_{\lambda^{(3)}}$$
$$-(c_2+\mu^{(2)}\ \phi+\mu'^{(3)}\ \psi-\mu'^{(2)})_{\mu'^{(2)}}\psi]\ F_F^*=0$$

(vii) यदि हम (1.3·1) से (1·3·3) तक में (1·4.1), (1.4.5) तथा $A_1=a$,

$$P_1=P_2=P_3=Q_1=Q_3=0,\ m_k=p_k=1,\ C^{(k)}=1-b_k \quad \forall k=1,2,3$$

प्रतिस्थापित करें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होगा जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत F_G^* फलन द्वारा होती है ।

$$[x(a+\alpha^{t_1}\ \theta-\alpha^{t_2}\ \phi+\alpha^{t_3}\ \psi)_{\alpha^{t_1}}\ (b_1+\gamma^{(1)}\ \theta)_{\gamma^{(1)}}$$
$$-(c_1+\delta^{(1)}\ \theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]\ F_G^*=0$$

$$[y(a+\alpha^{t_1}\ \theta+\alpha^{t_2}\ \phi+\alpha^{t_3}\ \psi)_{\alpha^{t_2}}(b_2+\gamma^{(2)}\ \phi)_{\gamma^{(2)}}$$
$$-(c_2+\mu^{(2)}\ \phi+\mu'^{(2)}\ \psi-\mu^{(2)})_{\mu^{(2)}}\ \phi]\ F_G^*=0$$

$$[z(a+\alpha^{t_1}\ \theta+\alpha^{t_2}\ \phi+\alpha^{t_3}\ \psi)_{\alpha^{t_3}}(b_3+\gamma^{(3)}\ \psi)_{\gamma^{(3)}}$$
$$-(c_2+\mu^{(2)}\ \phi+\mu'^{(2)}\ \psi-\mu'^{(2)})_{\mu'^{(2)}}\ \psi]\ F_G^*=0$$

(viii) इसी तरह यदि (1.4.2) तथा

$$m=p=q=0,\ X_1=X,\ X_2=Y,\ X_3=Z, \qquad (1.4.6)$$

$$P_1=Q_1=Q_2=Q_3=0,\ M_2=P_2=M_3=P_3=1,\ E_1^{(2)}=a_2,\ E_1^{(3)}=b_1,$$

$m_1=p_1=m_2=p_2=1,\ p_3=0,\ C^{(1)}=1-a_1,\ C^{(2)}=1-b_2$

प्रतिस्थापित करें तो आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत F_K^* समीकरण द्वारा हो जाती है।

$$[x(a_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda'^{(3)}} -(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]\,F_K^*=0$$

$$[y(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda^{(2)}}(b_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}} -(c_2+\delta^{(2)}\phi-\delta^{(2)})_{\delta^{(2)}}\phi]\,F_K^*=0$$

$$[z(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda'^{(2)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda^{(3)}} -(c_3+\delta^{(3)}\psi-\delta^{(3)})_{\delta^{(3)}}\psi]\,F_K^*=0.$$

(ix) यदि (1.3.1) से (1.3.3) तक में (1.4.2), (1.4.6) तथा

$$P_1=Q_1=Q_3=0,\ M_2\equiv P_2=M_3=P_3=Q_2=1;\ E_1^{(2)}=a_2$$

$$E_1^{(3)}=b_1,\ F_1^{(2)}=c_2,\ m_1=p_1=m_2=p_2=1,\ p_3=0,\ C_1^{(1)}=1-a_1, C^{(2)}=1-a_2$$

प्रतिस्थापित करें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत F_M^* द्वारा होती है।

$$[x(a_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)\lambda'^{(3)} -(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]\,F_M^*=0$$

$$[y(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda^{(2)}}(b_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}}-(c_2+\mu^{(2)}\phi-\mu'^{(2)}\psi-\mu^{(2)})_{\mu^{(2)}}\phi]\,F_M^*=0$$

$$[z(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda'^{(2)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda^{(3)}} -(c_2+\mu^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}\psi-\mu'^{(2)})_{\mu'^{(2)}}]\,F_M^*=0$$

(x) यदि (1.3.1) से (1.3.3) तक में (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) तथा

$$m_1=p_1=m_3=p_3=1,\ m_2=p_2=2,\ C_1^{(k)}=1-a_k,\ C_2^{(k)}=1-b_2$$

प्रतिस्थापित किया जाय तो हमें एक आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होगा जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत $F_N{}^*$ फलन द्वारा होती है।

$$[x(a_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda'^{(3)}}-(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]\,F_N{}^*=0$$

$$[y(a_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}}(b_2+\gamma'^{(2)}\phi)_{\gamma'^{(2)}}-(c_2+\mu^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}\psi-\mu^{(2)})_{\mu^{(2)}}\phi]\,F_N{}^*=0$$

$$[z(a_3+\gamma^{(3)}\psi)_{\gamma^{(3)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda^{(3)}}-(c_2+\mu^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}\psi-\mu'^{(2)})_{\mu'^{(2)}}\psi]\,F_N{}^*=0$$

(xi) यदि हम (1.3.1) से (1.3.3) तक में (1.4.5), (1.4.6) तथा

$$\text{M}_1=P_1=M_3=P_3=1,\ P_2=Q_1=Q_3=0,\ E_1^{(1)}=b_1,\ E_1^{(3)}=a_1$$

$$m_1=p_1=0,\ m_2=p_2=m_3=p_3=1,\ C_1^{(2)}=1-a_2,\ C_1^{(3)}=1-b_2$$

प्रतिस्थापित करें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत $F_P{}^*$ द्वारा होती है।

$$[x(a_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda'^{(3)}}(b_1+\lambda^{(1)}\theta+\lambda'^{(1)}\phi)_{\lambda^{(1)}}$$
$$-(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta^{(1)}}\theta]\,F_P{}^*=0$$

$$[y(a_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}}(b_1+\lambda^{(2)}\theta+\lambda^{(1)}\phi)_{\lambda'^{(1)}}$$
$$-(c_2+\mu^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}\psi-\mu^{(2)})_{\mu^{(2)}}\phi]\,F_P{}^*=0$$

$$[z(a_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda^{(3)}}(b_2+\gamma^{(3)}\psi)_{\gamma^{(3)}}$$
$$-(c_2+\mu^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}\psi-\mu'^{(2)})_{\mu'^{(2)}}\psi]\,F_P{}^*=0$$

(xii) यदि हम (1.3.1) से लेकर (1.3.3) तक में (1.4.5), (1.4.6) तथा

$$P_1=P_2=Q_1=Q_3=0,\ M_3=P_3=2,\ E_1^{(3)}=a_1,\ E_2^{(3)}=b_1$$

$$m_1=p_1=m_3=p_3=0,\ m_2-p_2=2,\ C_1^{(2)}=1-a_2,$$

$$C_2^{(2)}=1-b_2,\ \lambda_1^{(3)}=\lambda^3,\ \lambda_2^{(3)}=\lambda_1^{(3)}$$

प्रतिस्थापित करें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत F_R^* फलन द्वारा होती है।

$$[x(a_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda'(3)}(b_1+\lambda_1^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}_1\theta)_{\lambda'^{(3)}_1}$$

$$-(c_1+\delta^{(1)}\theta-\delta^{(1)})_{\delta(1)}\theta]\cdot F_R^*=0$$

$$[y(a_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma(2)}(b_2+\gamma'^{(2)}\phi)_{\gamma'(2)}-(c_2+\mu^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}\psi-\mu^{(2)})_{\mu(2)}\phi]\,F_R^*=0$$

$$[z(a_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda'(3)}(b_1+\lambda_1^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}_1\theta)_{\lambda_1^{(3)}}$$

$$-(c_2+\mu^{(2)}\phi+\mu'^{(2)}\psi-\mu'^{(2)})_{\mu'(2)}\psi]\,F_R^*=0$$

(xiii) यदि हम (1.3.1) से (1.3.3) तक में (1.4.3) तथा

$$P_1=P_3=Q_1=Q_3=0,\ M_2=P_2=1,\ E_1^{(2)}=a_3,\ Q_2=0$$

$$m_1=p_1=2,\ m_2=p_2=m_3=p_3=1,\ C_1^{(k)}=1-b_k,\ C_1^{(1)}=1-a_1$$

प्रतिस्थापित करें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत F_s^* द्वारा हो जाती है।

$$[x(a_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma(1)}(b_1+\gamma'^{(1)}\theta)_{\gamma'(1)}$$

$$-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_1})_{\beta t_1}\theta]\,F_S^*=0$$

$$\{y(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda'(2)}(b_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma(2)}$$

$$-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_3})_{\beta t_2}\phi]\,F_S^*=0$$

$$[z(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda'(2)}(b_3+\gamma^{(3)}\psi)_{\gamma(3)}$$

$$-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_3})_{\beta t_3}\psi]\,F_S^*=0$$

(xiv) यदि हम (1.3.1) से (1.3.3) तक में (1.4.3) तथा

$$X_1=X,\ X_2=Y,\ X_3=Z.$$

$$P_1=Q_1=Q_2=Q_3=0,\ M_3=P_2=M_3=P_3=1,\ E_1^{(2)}=a_2,\ E_1^{(3)}=b_1$$

$$m_1=p_1=m_2=p_2=1,\ p_3=0,\ C_1^{(1)}=1-a_1,\ C_1^{(2)}=1-b_2$$

प्रतिस्थापित करें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसकी तुष्टि सरन के सार्वीकृत $F_T{}^*$ द्वारा हो जाती है ।

$$[x(a_1+\gamma^{(1)}\theta)_{\gamma^{(1)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda'^{(3)}}$$

$$-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_1})_{\beta^{t_1}}\theta]\ F_T{}^*=0$$

$$[y(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda^{(2)}}(b_2+\gamma^{(2)}\phi)_{\gamma^{(2)}}$$

$$-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_2})_{\beta^{t_2}}\phi]\ F_T{}^*=0$$

$$[z(a_2+\lambda^{(2)}\phi+\lambda'^{(2)}\psi)_{\lambda'^{(2)}}(b_1+\lambda^{(3)}\psi+\lambda'^{(3)}\theta)_{\lambda^{(3)}}$$

$$-(c_1+\beta^{t_1}\theta+\beta^{t_2}\phi+\beta^{t_3}\psi-\beta^{t_3})_{\beta^{t_3}}\psi]\ F_T{}^*=0$$

सार्वीकृत लारिसेला तथा सरन के फलनों के समाकल निरूपण शीघ्र ही (1.1.0) में उपर्युक्त प्रतिस्थापनों के बाद प्राप्त होंगे ।

यदि इनके साथ ही सभी ग्रीक अक्षर (θ, ϕ, ψ के अतिरिक्त) जिनसे $x\frac{\partial}{\partial x}$, $y\frac{\partial}{\partial y}$, $z\frac{z}{\partial z}$ का सूचन होता है , इकाई हो जावें तो हमें लारिसेला तथा सरन के फलन द्वारा तुष्टि आंशिक अवकल समीकरणों की प्राप्ति होगी (देखें गोयल तथा जैन[3] भी) ।

निर्देश

1. बापना, पी० तथा गोयल, ए०एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1979 (प्रेषित)
2. जैन, के०सी० तथा गोयल, ए०एन०, Acta Ciencia Indica, 3, 1277, 259 (देखें जैन, के०सी० **पी०एच०डी० थीसिस** राजस्थान विश्वविद्यालय, 1975)
3. गोयल, ए०एन० तथा जैन, के०सी०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1980, **23**, 25-35
4. शान्ति सरन, **गणित**, 1954, 5(2), 69

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982 Pages, 371-380

बहुचरीय H- बहुपद के लिए कुछ समाकल एवं श्रेणी सम्बन्ध

वाई० एन० प्रसाद तथा यू० एस० मिश्रा

सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—नवम्बर 18, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में प्रभाकर तथा तोमर द्वारा प्रचारित द्विलाम्बिक बहुपदों का सार्वीकरण कई चरों वाले H-फलन के पदों में एक अधिक व्यापक बहुपद को सन्निविष्ट करते हुए किया गया है।

Abstract

Some integrals and series relations for multivariable H-polynomial. *By* Y. N. Prasad and U. S. Mishra, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

Biorthogonal polynomials introduced by Prabhakar and Tomar[1] have been generalized by introducing a more general polynomial in terms of H-function of several variables.

1. प्रस्तावना

प्रभाकर तथा तोमर[1] ने निम्नलिखित द्विलाम्बिक बहुपदों का परिचय दिया है, जो $U_n(x; k)$ तथा $V_n(x; k)$ हैं

$$U_n(x; k)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\, {}^nc_r\, \frac{\left(\frac{r+1}{k}\right)_n}{(1/k)_n}(1-x/2)^r, \tag{1.1}$$

$$V_n(x; k)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\, {}^nc_r\, \frac{(1+n)_{kr}}{(1)_{kr}}(1-x/2)^{kr}, \tag{1.2}$$

साथ ही उनसे सम्बद्ध कतिपय समाकलों का अध्ययन किया है और इनका उपयोग श्रेणी सम्बन्धों को प्राप्त करने में किया है । हमने उनका सार्वीकरण कई चरों वाले H-फलन के पदों में एक अधिक व्यापक बहुपद को सन्निविष्ट करके किया है ।

प्रसाद तथा मौर्य[2] ने बहुचरीय H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है

$$H_{p,q}^{0,n'} \begin{matrix} : (V', W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)}) \\ : [X', Y'] ; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}] \end{matrix} \left[\begin{matrix} \{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(r)})\}; \\ \{(b_q; \beta'_q, \ldots, \beta_q^{(r)})\}; \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X^{(r)}})\} \\ \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y^{(r)}}, \xi^{(r)}_{Y^{(r)}})\} \end{matrix} ; x_1, \ldots, x_r \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \theta_1(S_1) \ldots \theta_r(S_r) \, \psi(S_1, \ldots, S_r)$$

$$x_1^{S_1} \ldots x_r^{S_r} \, dS_1 \ldots dS_r, \; \omega = \sqrt{(-1)} \tag{1.3}$$

जहाँ

$$\theta_i(S_1) = \frac{\prod_{j=1}^{V^{(i)}} \Gamma(B_j^{(i)} - \xi_j^{(i)} S_i) \prod_{j=1}^{W^{(i)}} \Gamma(1 - A_j^{(i)} + \eta_j^{(i)} S_i)}{\prod_{j=V^{(i)}+1}^{Y^{(i)}} \Gamma(1 - B_j + \xi_j^{(i)} S_i) \prod_{j=W^{(i)}+1}^{X^{(i)}} \Gamma(A_j^{(i)} - \eta_j^{(i)} S_i)},$$

$$i = 1, \ldots, r$$

$$\psi(S_1, \ldots, S_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} S_i)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^{r} \beta_j^{(i)} S_i) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} S_i)}$$

जहाँ ( ) से डैशों की संख्या सूचित होती है, यथा $a^{(1)}=a'$, $a^{(2)}=a''$, इत्यादि $\{(A_X, \eta_X)\}$ तथा $\{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(r)})\}$ X तथा p-प्राचलों के अनुक्रम में क्रमशः संक्षिप्त हो जाते हैं $(A_1, \eta_1), \ldots, (A_X; n_x)$ तथा $a_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha_1^{(r)}), \ldots, (a_p, \alpha'_p, \ldots, \alpha_p^{(r)}$ तथा रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है, गुणांक $\alpha_j^{(i)}$ $(j=1, \ldots, p)$, $\beta_j^{(i)}$ $(j=1, \ldots, q)$; $\beta_j^{(i)}$ $(j=1, \ldots, X)$, $\eta_j^{(i)}$ $(j=1, \ldots, Y)$ $i=1, \ldots, r$ धन संख्याएं तथा n', $V^{(i)}$, $W^{(i)}$, p, q, $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$ ऐसी धन संख्याएं हैं जिससे कि $0 \leqslant n' \leqslant p$, $q > 0$, $0 \leqslant V^{(i)} \leqslant Y^{(i)}$ तथा $0 \leqslant W^{(i)} \leqslant X^{(i)}$, $i=1, \ldots, r$.

अभिसरण के प्रतिबन्ध प्रसाद तथा मौर्य[4] ने अपने प्रपत्र में दे रखा है। हमने बहुचरीय H-बहुपद पर निम्न प्रकार से विचार किया है :

$$H^{0,n'}_{p,q}\begin{matrix}:(V'+1, W');\ldots;(V^{(r)}, W^{(r)})\\ :[X'+1, Y'+1];\ldots;[X^{(r)}, Y^{(r)}]\end{matrix}\left[\begin{matrix}\{(a_p;\alpha'_p,\ldots,\alpha^{(r)}_p)\}:\\ \{(q_q;\beta'_q,\ldots,\beta^{(r)}_q)\};\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(A'_{X'},\eta'_{X'})\},(n+1,1);\{(A''_{X''},\eta''_{X''})\};\ldots;\{(A^{(r)}_{X^{(r)}},\eta^{(r)}_{X^{(r)}})\}\\ (0,1),\{(B'_{Y'},\xi'_{Y'})\};\ldots;\{(B^{(r)}_{Y^{(r)}},\xi^{(r)}_{Y^{(r)}})\}\end{matrix};a_1x_1,\ldots,a_rx_r\right], \tag{1.4}$$

क्योंकि $q=0=n'=p$; $V''=V'''=\ldots=V^{(r)}=1=Y''=Y'''=\ldots=Y^{(r)}$; $W''=W'''\ldots=W^{(r)}=0=X''=X'''=\ldots=X^{(r)}$, रखने तथा $a_2,\ldots,a_r\to0$ करने पर उपर्युक्त फलन

$$H^{V'+1,\,W'}_{X'+1,\,Y'+1}:\left[a_1x_1\left|\begin{matrix}\{(A'_{X'},\eta'_{X'})\},(n+1,1)\\(0,1),\{B'_{Y'},\xi'_{Y'})\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{\prod_{j=1}^{V'}\Gamma(B'_j-\xi'_j r)\prod_{j=1}^{W'}\Gamma(1-A'_j+\eta'_j r)}{\prod_{j=V'+1}^{Y'}(1-B'_j+\xi' r)\prod_{j=W'+1}^{X'}(A'_j-\eta'_j r)}a^r_1x^r_1, \tag{1.5}$$

में समानीत हो जाता है जो x_1 का n कोटि का बहुपद है। $U_n(x;k)$ तथा $V_n(x;k)$ बहुपद अनुभाग 3 में बहुपद (1.5) की विशिष्ट दशाओं के रूप में दिखाया गया है।

2. समाकल

इस अनुभाग में हम H-बहुपद वाले चार समाकलों का, जो (1.4) में दिये हुए हैं मान ज्ञात करेंगे।

(a) $$\int_0^{\pi/2}\cos 2u\theta\,(\sin\theta)^v\quad H^{0,n'}_{p,q}\begin{matrix}:(V'+1, W');\ldots;(V^{(r)}, W^{(r)})\\ :[X'+1, Y'+1];\ldots;[X^{(r)}, Y^{(r)}]\end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}\{(a_p;\alpha'_p,\ldots,\alpha^{(r)}_p)\};\{(A'_{X'},\eta'_{X'})\},(n+1,1);\{(A''_{X''},\eta''_{X''})\};\ldots;\\ \{(b_q;\beta'_q;\ldots;\beta^{(r)}_q)\};(0,1),\{(B'_{Y'},\xi'_{Y'})\};\ldots;\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(A^{(r)}_{X^{(r)}}, \eta^{(r)}_{X^{(r)}})\} \\ \{(B^{(r)}_{Y^{(r)}}, \xi^{(r)}_{Y^{(r)}})\}\end{matrix} ; z_1(\sin\theta)^{2h_1}; \ldots; z_r(\sin\theta)^{2h_r}\right] d\theta$$

$$= \frac{\Gamma_*(\frac{1}{2}\pm u)}{2^{v+1}} H^{0,n'+1}_{p+1,\, q+2} \begin{matrix} : (V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)}) \\ : [X'+1, Y'+1]; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}] \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}(-v, 2h_1, \ldots, 2h_r), \{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\} \\ \{(b_q; \beta'_q, \ldots, \beta^{(r)}_q)\}; \ (\frac{-v}{2}\pm u, h_1, \ldots, h_r);\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1): \ \{(A''_{X''}, \eta''_{X''}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X^{(r)}}, \eta^{(r)}_{X^{(r)}})\} \\ (0, 1), \ \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\}; \ldots; \ \{(B^{(r)}_{Y^{(r)}}, \xi^{(r)}_{Y^{(r)}})\}\end{matrix} ; z_1 2^{-2h_1}, \ldots, z_r 2^{-2h_r}\right] \tag{2.1}$$

बशर्ते कि μ एक पूर्णांक है,

$$Re\,(v+\sum_{i=1}^{r} 2h_i\, a_i+1)>0, \ a_i=\min Re\,(B^{(i)}_j \mid \xi^{(i)}_j), \ j=1, \ldots, V^{(i)},$$

$$|\arg Z_i| < \tfrac{1}{2} U_i \pi, \ U_i>0,$$

जहाँ

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha^{(i)}_j - \sum_{j=n+1}^{p} \alpha^{(i)}_j - \sum_{j=1}^{p} \beta^{(i)}_j + \sum_{j=1}^{V^{(i)}} \xi^{(i)}_j + \sum_{j=V^{(i)}+1}^{Y^{(i)}} \xi^{(i)}_j + \sum_{j=1}^{W^{(i)}} \gamma^{(i)}_j$$

$$- \sum_{j=W^{(i)}+1}^{X^{(i)}} \eta^{(i)}_j > 0, \ i=1, \ldots, r.$$

(b) $$\int_0^{\pi/2} \cos u\theta\, (\cos\theta)^v\, H^{0,n'}_{p,q} \begin{matrix} : (V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)}) \\ : [X'+1, Y'+1]; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}] \end{matrix} \left[\begin{matrix}\{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\} \\ \{(b_q; \beta'_q, \ldots, \beta^{(r)}_q)\};\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}\{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1): \ \{(A''_{X''}, \eta''_{X''})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X^{(r)}}, \eta^{(r)}_{X^{(r)}})\} \\ (0, 1), \ \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y^{(r)}}, \xi^{(r)}_{Y^{(r)}})\}\end{matrix} ;$$

$$\left. z_1(\cos\theta)^{2h_1}, \ldots; (z_r(\cos\theta)^{2h_r} \right] \times d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{\nu+1}} H^{0,n'+1}_{p+1,\ q+2} \begin{matrix} : (V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)}) \\ : [X'+1, Y'+1]; \ldots: [X^{(r)}, Y^{(r)} \end{matrix} \left[\begin{matrix} (-\nu, 2h_1, \ldots, 2h_r), \\ \{(b_q;\ \beta'_q, \ldots, \beta^{(r)}_q)\} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \{(a_p;\ \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\};\ \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1); \{(A''_{X''}, \eta''_{X''})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X(r)}, \eta^{(r)}_{X(r)})\} \\ (-\nu/2 \pm u|2, h_1, \ldots, h_r); (0, 1),\ \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y(r)}, \xi^{(r)}_{Y(r)})\} \end{matrix} ;$$

$$\left. z_1\, 2^{-2h_1}, \ldots, z_r\, 2^{-2h_r} \right], \quad (2.2)$$

बशर्ते कि u एक पूर्णांक है और अन्य प्रतिबन्ध (2.1) के ही समान हैं।

(c) $$\int_0^{\pi/2} \cos(\alpha+\beta)\theta\, (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1}\ H^{0,n'}_{p,q} \begin{matrix} : (V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)} \\ : [X'+1, Y'+1]; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)} \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} \{(a_p;\ \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\};\ \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1); \ldots;\ \{(A''_{X''}, \eta''_{X''})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X(r)}, \eta^{(r)}_{X(r)})\} \\ \{(b_q;\ \beta'_{q'}, \ldots, \beta^{(r)}_q)\}; (0, 1),\ \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y(r)}, \xi^{(r)}_{Y(r)})\} \end{matrix} \right.$$

$$\left. ; z_1 (\tan\theta)^{2\delta_1} \ldots, z_r (\tan\theta)^{2\delta_r} \right] d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} H^{1,n'+1}_{p+2,q+1} \begin{matrix} : (V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)} \\ : [X'+1, Y'+1]; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}] \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} (1-\alpha/2, \delta_1, \ldots, \delta_r)\ \{(a_p;\ \alpha'_p; \ldots;\ \alpha^{(r)}_p)\}; (1-\alpha/2), \delta_1, \ldots, \delta_r);\ \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, \\ (\beta,\ 2\delta_1, \ldots, 2\delta_r)\ \{(b_q;\ \beta'_q; \ldots, \beta^{(r)}_q; (0, 1), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (n+1, 1); \{(A''_{X''}, \eta''_{X''})\}; \ldots; \{(A^{(r)}_{X(r)}, \eta^{(r)}_{X(r)})\} \\ \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\}, \ldots; \{(B^{(r)}_{Y(r)}, \xi^{(r)}_{Y(r)})\} \end{matrix} ; z_1\, 2^{\delta_1}, \ldots, z_r\, 2^{2\delta_r} \right], \quad (2.3)$$

बशर्ते कि $(\alpha+\beta)$ घनात्मक पूर्णांक हो,

$$Re\ (\alpha+\sum_{i=1}^{r} 2\delta_i\ \alpha_i+1)>0,\ Re\ (\beta-\sum_{i=1}^{r} 2\ \delta_i\ \alpha_i+1)>0,$$

तथा $|\arg z_i|<\frac{1}{2}\ U_i\pi,\ U_i>0$, जहाँ α_i तथा U_i (2.1) के ही समान हैं।

(d)

$$\int_0^{\pi/2} \sin\ (\alpha+\beta)\theta\ (\sin\theta)^{\alpha-1}\ (\cos\theta)^{\beta-1}\ H_{p,q}^{0,n'}\ {}^{:\ (V'+1,\ W');\ \ldots;\ (V^{(r)},\ W^{(r)})}_{:\ [X'+1,\ Y'+1];\ \ldots;\ [X^{(r)},\ Y^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{matrix}\{(a_p\ ;\ \alpha_p',\ \ldots,\ \alpha_p^{(r)})\},\ \{(A_{X'},\eta_{X'})\},\ (n+1,\ 1),\ \ldots,\ \{(A_{X''}'',\eta_{X''}'')\},\ \ldots,\ \{(A_{X(r)}^{(r)},\eta_{X(r)}^{(r)})\}\\ \{(b_q;\ \beta_q',\ \ldots,\ \beta_q^{(r)})\};\ (0,\ 1);\ \{(B_{Y'}',\xi_{Y'}')\};\ \ldots;\ \{(B_{Y(r)}^{(r)},\xi_{Y(r)}^{(r)})\};\end{matrix}\right.$$

$$\left.z_1\ (\tan\theta)^{2\delta_1},\ \ldots,\ z_r\ (\tan\theta)^{2\delta_r}\right]\ d\theta$$

$$=\frac{\pi\ 2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ H_{p+1,q+1}^{1,n'+1}\ {}^{:\ (V'+1,\ W');\ \ldots;\ (V^{(r)},\ W^{(r)})}_{:\ [X'+1,\ Y'+1];\ \ldots;\ [X^{(r)},\ Y^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{matrix}(1-\alpha/2,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_r),\ \ \{(a_p;\ \alpha_p',\ \ldots,\ \alpha_p^{(r)})\};\ (1-\alpha/2,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_r);\\ (\beta,\ 2\delta_1,\ \ldots,\ 2\delta_r),\ \{(b_q;\ \beta_q',\ \ldots,\ \beta_q^{(r)})\};\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(A_{X'}',\eta_{X'}')\},\ (n+1,\ 1);\ \{(A_{X''}'',\eta_{X''}'')\};\ \ldots;\ \{(A_{X(r)}^{(r)},\eta_{X(r)}^{(r)})\}\\ (0,\ 1),\ \{(B_{Y'}',\xi_{Y'}')\};\ \ldots;\ \{(B_{Y(r)}^{(r)},\xi_{Y(r)}^{(r)})\}\end{matrix}\ ;\ z_1\ 2^{2\delta_1},\ \ldots,\ z_r\ 2^{2\delta_r}\right], \tag{2.4}$$

जहाँ $(\alpha+\beta)$ घनात्मक पूर्णांक है और (2.1) में दिये हुए अन्य प्रतिबन्ध तुष्ट हो जाते हैं।

उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिए समाकल्य में (1.3) को व्यवहृत करते हैं और समाकलन तथा संकलन के क्रम को परिवर्तित करते हैं। वामपक्ष को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{Lr}\frac{\Gamma(-s_1),\ \theta_1(s_1)\ \ldots\ \theta_r(s_r)\ \psi(s_1,\ \ldots\ s_r)\ (z_1)^{s_1}\ \ldots\ (z_r)^{s_r}}{\Gamma(n+1-s_1)}$$

$$\left\{\int_0^{\pi/2} \cos\ 2u\theta\ (\sin\theta)^{v+2\sum_{i=1}^{r} hisi}\ d\theta\right\}\ ds_1\ \ldots\ ds_r. \tag{2.5}$$

अब आन्तरिक समाकल का मान एर्डेल्यी[3] के परिणाम की सहायता से निकालने पर, अर्थात्

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2u\theta\ (\sin\theta)^v\ d\theta = \frac{\Gamma(v+1)\ \Gamma_*(\frac{1}{2}\pm u)}{2^{v+1}\ \Gamma_*(v/2\pm u+1}\,,$$

जहाँ u धनात्मक पूर्णांक है और $Re(v+1)>0$, परिणाम (2.5) समतुल्य है

$$\frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{Lr}\frac{\Gamma(-s_1)\ \theta_1(s_1)\ \ldots\ \theta_r(s_r)\ \psi(s_1,\ \ldots,\ s_r)\ \ z_1^{s_1}\ldots\ z_r^{s_r}\ )}{\Gamma(n+1-s_1)}$$

$$\frac{\Gamma(v+1+2\ h_1\ s_1+\ldots+2h_r\ s_r)}{2^{v+1+2\sum\limits_{i=1}^{r} hisi}\ \Gamma_*(1+v/2\pm u+\sum\limits_{i=1}^{r} hisi)}\ ds_1\ \ldots\ ds_r,$$

के जिससे (2.1) प्राप्त होता है।

समाकल (2.2) का मान (2.1) की ही भाँति एर्डेल्यी के समीकरण[3] अर्थात्

$$\int_0^{\pi/2} \cos m\theta\ (\cos\theta)^n\ d\theta = \frac{\pi\ \Gamma(n+1)}{2^{n+1}\ \Gamma_*\left(\frac{n}{2}\pm\frac{m}{2}+1\right)},$$

का उपयोग करके निकाला जा सकता है जहाँ m धनात्मक पूर्णांक है, $Re(n+1)>0$.

समाकल (2.3) तथा (2.4) का मान मैकराबर्ट[4] के परिणामों का सदुपयोग करके ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात्

$$\int_0^{\pi/2} \cos\ (\alpha+\beta)\ \theta\ (\sin\theta)^{\alpha-1}\ (\cos\theta)^{\beta-1}\ d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\ 2^{\alpha-1}\ \Gamma(\beta)\ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\ \Gamma(\alpha+\beta)}$$

तथा $$\int_0^{\pi/2} \sin\int_0\ (\alpha+\beta)\ \theta\ (\sin\theta)^{\alpha-1}\ (\cos\theta)^{\beta-1}\ d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\ 2^{\alpha-1}\ \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\ \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\ \Gamma(\alpha+\beta)},$$

जहाँ $Re(\alpha)\geqslant 0$, तथा $Re(\beta)\geqslant 0$.

3. विशिष्ट दशाएं

(i) $q=0=n'=p$; $v''=V'''=\ldots=v^{(r)}=1=Y''=Y'''=\ldots Y^{(r)}$; $W''=W^{(r)}=0=X''=X'''=\ldots=X^{(r)}$ लेने तथा $z_2,\ \ldots,\ z_r\rightarrow 0$ से (2.1) समानीत हो जाता है

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2u\theta\, (\sin\theta)^v\, H^{V'+1,W'}_{X'+1,Y'+1}\left[z_1 (\sin\theta)^{2h_1} \,\middle|\, \begin{matrix} \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1) \\ (0, 1), \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\} \end{matrix} \right] d\theta$$

$$= \frac{\Gamma_*(\tfrac{1}{2} \pm u)}{2^{v+1}} H^{0,1}_{1,2} \begin{matrix} :(V'+1, W') \\ :[X'+1, Y'+1] \end{matrix} \left[\begin{matrix} (-v, 2h_1, \ldots, 2h_r); \\ (-v/2 \pm u, h_1, \ldots, h_r); \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1) \\ (0, 1), \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\} \end{matrix} ; z_1 2^{-2h_1} \right], \qquad (3.1)$$

(3.1) में बशर्ते कि (2.1) के समानीत प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों ।

(ii) (3.1) में $V'=0=W'=1=X'$, $A'=1-\frac{1}{k}-n$, $=\frac{1}{k}$, $Y'=2$, $B'_1=1-\frac{1}{k}$ $=B'_2$, $\xi'_1=1, \xi'_2=\frac{1}{k}$ रखने पर तथा इसे $(1/k)\, n!$, से भाग देने पर यह प्रभाकर तथा तोमर के उस परिणाम [1, eq (2.1)] में समानीत होता है जिसमें बहुपद $U_n(x; k)$ आया है ।

(iii) (3.1) में $V'=0, W'=X'=Y'=1, A'_1=-n, \eta'_1=k, B'_1=0, \xi'_1=K$ रखने तथा $2h_1$ को k द्वारा स्थानान्तरित करने पर यह प्रभाकर तथा तोमर के फल [1, eq. (2.7)] में समानीत होता है जिसमें बहुपद $V_n(x; k)$ है ।

4. सम्प्रयोग

पिछले अनुभाग में स्थापित किये गये समाकल सम्बन्धों का उपयोग संगत फूरियर श्रेणी सम्बन्धों को प्राप्त करने के लिए किया जा सकता है । (2.1) के सम्प्रयोग से हम सिद्ध कर सकते हैं कि—

$$(\sin\theta)^v\, H^{0,n'}_{p,q} \begin{matrix} :(V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)}) \\ :[X'+1. Y'+1]; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}] \end{matrix} \left[\begin{matrix} \{(a_p;\ \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\}; \\ \{(b_q;\ \beta'_q, \ldots, \beta^{(r)}_q)\}; \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1)\}; \ \{(A''_{X''}, \eta''_{X''})\}; \ldots; \ \{(A^{(r)}_{X(r)}, \eta^{(r)}_{X(r)}) \\ (0, 1), \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y})\}; \ldots; \{(B^{(r)}_{Y(r)}, \xi^{(r)}_{Y(r)})\} \end{matrix} ; z_1(\sin\theta)^{2h_1}, \ldots, z_r (\sin\theta)^{2h_r} \right]$$

$$=\frac{1}{\pi\, 2^{v+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \Gamma_*(\tfrac{1}{2}\pm r)\, H^{0,n'+1}_{p+1,q+2} \begin{matrix} :(V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)}) \\ :[X'+1, Y'+1]; \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}] \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} (-v, 2h_1, \ldots, \{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\}; \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1); \{(A''_{X''}, \eta''_{X''})\}; \ldots; \\ \{(b_q; \beta'_q, \ldots, \beta^{(r)}_q)\}; (-v/2\pm r, h_1, h_2, \ldots, h_r); (0, 1), \{(B'_{Y'}, \xi'_{Y'})\}; \ldots; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \{(A^{(r)}_{X(r)}, \xi^{(r)}_{X(r)})\} \\ \{(B^{(r)}_{Y(r)}, \xi^{(r)}_{Y(r)})\} \end{matrix} ; z_1\, 2^{-2h_1} \ldots z_r\, 2^{-2h_r} \right] \times \cos 2r\theta,\ 0<\theta<\pi/2 \qquad (4.1)$$

जहाँ $Re\,(v+\sum_{i=1}^{r} 2h_i\, a_i+1)>0$, $a_i=\min Re\,(B^{(i)}_j/\xi^{(i)}_j)$, $j=1, \ldots, V^{(i)}$ $|\arg zi| < \frac{1}{2}\, Ui\pi$,

$Ui>0$, जहाँ

$$U_i=\sum_{j=1}^{n'} \alpha^{(i)}_j \sum_{j=n'+1}^{p} \alpha^{(i)}_j - \sum_{j=1}^{q} \beta^{(i)}_j + \sum_{j=1}^{V(i)} \xi^{(i)}_j - \sum_{j=V(i)+1}^{Y(i)} \xi^{(i)}_j + \sum_{j=1}^{W(i)} \eta^{(i)}_j - \sum_{j=W(i)+1}^{X(i)} \eta^{(i)}_j >0,$$

$$i=1, \ldots, r,$$

उपपत्ति : यदि हम (4.1) के वामपक्ष को $f(\theta)$ द्वारा अंकित करें तो हम लिख सकते हैं कि

$$f(\theta)=\sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos 2r\,\theta,\ 0<\theta<\pi/2, \qquad (4.2)$$

क्योंकि $f(\theta)$ संतत है और $(0, \pi/2)$ में परिबद्ध विचरण वाला है। गुणांक Ar को (4.2) के दोनों पक्षों में $\cos 2r\,\theta$ से गुणा करके तथा (2.1) का प्रयोग करते हुए 0 से $\pi/2$ के मध्य समाकलित करके निकाला जा सकता है।

अतः $$A_r=\frac{\Gamma_*(\frac{1}{2}\pm r)}{2^{+1}} H^{0,\eta'+1}_{p+1,q+1} \begin{matrix} :(V'+1, W'); \ldots; (V^{(r)}, W^{(r)}) \\ :[X'+1, Y'+1], \ldots; [X^{(r)}, Y^{(r)}] \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} (-v, 2h_1, \ldots, 2h_r), \{(a_p; \alpha'_p, \ldots, \alpha^{(r)}_p)\}; \{(A'_{X'}, \eta'_{X'})\}, (n+1, 1); \\ \{(b_q; \beta'_{q'}, \ldots, \beta^{(r)}_q)\}; (-v/2+r, h_1, \ldots, h_r); (0, 1), \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(A''_{X''}, \eta''_{X''})\}, \ldots, (A^{(r)}_{X(r)}, \eta^{(r)}_{X(r)})\} \\ \{(\beta'_{Y'}, \xi'_{Y'})\};\ldots;\{(B^{(r)}_{Y(r)}, \xi^{(r)}_{Y(r)})\}\end{matrix} ; z_1 2^{-2/h_1}, \ldots; z_r 2^{-2/h_r}\right],$$

बशर्ते कि (2.1) में दिये हुए प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

अन्य समाकल सूत्रों के संगत श्रेणी सम्बन्धों को इसी तरह से स्थापित किया जा सकता है।

निर्देश

1. प्रभाकर तथा तोमर, Indian J. P. A. Math., 1980, **11**(7), 863-869.
2. प्रसाद तथा मौर्य, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1979, **22**, 73-83.
3. एर्डेल्यी ए०, Higher Transcendental Functions, भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.
4. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math. Ann., 1961, **142**, 450-452.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages, 381-387

कई चरों वाले सार्वीकृत फलनों के समाकल-II

आर०सी० बोहरा तथा यू०सी० जैन
गणित विभाग, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर

[प्राप्त---मार्च 5, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में कई चरों वाले सार्वीकृत फलनों के चार समाकलों का मान निकाला गया है। चौबीसा द्वारा प्राप्त फल हमारे परिणामों की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं। अन्तिम दो समाकल सर्वथा नवीन प्रतीत होते हैं।

Abstract

Integrals involving generalized functions of several variables-II. *By* R. C. Bohara and U. C. Jain, Department of Mathematics, University of Udaipur, Udaipur.

In this paper, we have evaluated four integrals involving generalized functions of several variables. The results obtained by Choubisa are the particular cases of our findings. The last two integrals involving generalized functions of several varia bles are believed to be new.

1. प्रस्तावना

परिभाषा : प्रस्तुत प्रपत्र में आये हुये n चरों वाले H फलन को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित और प्रदर्शित किया जावेगा[4]

$$H^{0,\lambda\ :\ (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)})}_{A,C\ :\ [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}]} \left(\begin{matrix} [(a) : \theta', \ldots, \theta^{(n)}] : [(b') : \phi']; \ldots; [(b^{(n)}) : \phi^{(n)}]; \\ [(c) : \psi', \ldots, \psi^{(n)}] : [(d') : \delta']; \ldots; [(d^{(n)}) : \delta^{(n)}]; \end{matrix} \; x_1, \ldots, x_n \right) \tag{1.1}$$

$$=\frac{1}{(2\pi\omega)^n}\int_{h_1}\cdots\int_{h_n}\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\phi_1(\xi_1)\ldots\phi_n(\xi_n)\,x_1^{\xi_1}\ldots x_n^{\xi_n}d\xi_1\ldots d\xi_n\quad \omega=\sqrt{-1}$$

जहाँ

$$\phi_i(\xi_i)=\frac{\prod_{j=0}^{\mu^{(i)}}\Gamma[d_j^{(i)}-\delta_j^{(i)}\xi_i]\prod_{j=1}^{\nu^{(i)}}\Gamma[1-b_j^{(i)}+\phi_j^{(i)}\xi_i]}{\prod_{j=b^{(i)}+1}^{D^{(r)}}\Gamma[1-d_j^{(i)}+\delta_j^{(i)}\xi_i]\prod_{j=\nu^{(i)}+1}^{B^{(i)}}\Gamma[b_j^{(i)}-\phi_j^{(i)}\xi_i]} \tag{1.2}$$

$$\psi(\xi_1;\ldots;\xi_n)=\frac{\prod_{j=1}^{\lambda}\Gamma[1-a_j+\sum_{i=1}^{n}\theta_j^{(i)}\xi_i]}{\prod_{j=\lambda+1}^{A}\Gamma[a_j-\sum_{i=1}^{n}\theta_j^{(i)}\xi_i]\sum_{j=1}^{C}\Gamma[1-C_j+\sum_{i=1}^{n}\psi_j^{(i)}\xi_i]_{i=1,\ldots,n}} \tag{1.3}$$

रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है, गुणांक

$$\theta_j^{(i)}\ j=1,\ldots,A;\ \phi_j^{(i)}\ j=1,\ldots,B^{(i)};\ \psi_j^{(i)},j=1,\ldots,C;\ \delta_j^{(i)},\ j=1,\ldots,D^{(1)}$$

तथा $i=1,\ldots,n$ धन संख्याएँ हैं तथा λ, $\mu^{(i)}$, $\nu^{(i)}$, A, $B^{(i)}$, C, $D^{(i)}$ ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं कि $0\leqslant\lambda\leqslant A$, $0\leqslant\mu^{(i)}\leqslant D^{(i)}$, $C\geqslant 0$ तथा $0\leqslant\nu^{(i)}\leqslant B^{(i)}$, $i=1,\ldots,n$. कंटूर L_i सम्मिश्र ξ_i तल में हैं और मेलिन-बार्नीज प्रकार का है जो दंतुरों सहित $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक विस्तीर्ण हैं जिससे कि आवश्यकता पड़े तो $\Gamma[d_j^{(i)}-\delta_j^{(i)}\xi_i]$, $(j=1,\ldots,\mu^{(i)})$ के समस्त पोल L_i के दायीं ओर तथा

$\Gamma[1-b_j^{(i)}+\phi_j^{(i)}\xi_i]$, $(j=1,\ldots,\nu^{(i)})$ एवं $\Gamma[1-a_j+\sum_{i=1}^{n}\theta_j^{(i)}\xi_i]$, $(j=1,\ldots,\lambda)$ के समस्त पोल

बायीं ओर पड़ें। विभिन्न प्राचल इस प्रकार प्रतिबन्धित हैं कि कोई भी पोल संगमित नहीं होता।

बहुगुण कंटूर समाकल (1.1) परम अभिसारी होगा यदि

$$\triangle_i\equiv\sum_{j=1}^{\lambda}\theta_j^{(i)}-\sum_{j=\lambda+1}^{A}\theta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{\nu^{(i)}}\phi_j^{(i)}-\sum_{j=\nu^{(i)}+1}^{B^{(i)}}\phi_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=1}^{C}\psi_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{\mu^{(i)}}\delta_j^{(i)}-\sum_{j=\mu^{(i)}+1}^{D^{(i)}}\delta_j^{(i)}>0, \tag{1.4}$$

$$|\arg x_i|<\tfrac{1}{2}\pi\triangle_i,\ i=1,\ldots,n. \tag{1.5}$$

सुविधा के लिए हम संक्षिप्त संकेतन का व्यवहार करेंगे और (1.1) के प्रथम सदस्य को संक्षिप्त रूप में लिखते हैं जब भी किसी प्रकार का संदेह नहीं होता।

$$H^{0,\lambda}_{A,C} \begin{matrix} : & (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)}) \\ : & [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}] \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(1.1) की विशिष्ट दशा

यदि हम (1.1) में समस्त $\theta', \phi', \delta', \psi'$ को इकाई के तुल्य मान लें तो यह n चरों वाले G फलन में समानीत हो जाता है[3] जिसे हम निम्नवत् प्रदर्शित करेंगे।

$$G^{0,\lambda}_{A,C} \begin{matrix} : & (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)} \\ : & [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}] \end{matrix} \left(\begin{matrix} (a) : b', \ldots; b^{(n)} \\ (c) : d', \ldots; d^{(n)} \end{matrix} \; x_1, \ldots, x_n \right)$$

प्रथम समाकल

$$\int_0^\infty \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)t\right) M_{k,\mu}(\alpha t)\, W_{\lambda,\nu}(\beta t)\, t^{\mu-1}$$

$$\times H^{0,0}_{A,C} \begin{matrix} : & (\mu', \nu'); \ldots; \mu^{(n)}, \nu^{(n)}) \\ : & [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}] \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1\, t^{\rho_1} \\ \vdots \\ x_n\, t^{\rho_n} \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{\alpha^{\mu+1/2}}{\beta^{\mu+\rho+1/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+k+\mu)_r\, (-1)^r\, \alpha^r}{(2\lambda+1)_r\, \beta^r\, r!} \; H^{0}_{A+2} \begin{matrix} , & 2 : (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)}) \\ , & C+1 : [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}] \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} [-\mu \pm \nu - \rho - r : \rho_1, \ldots, \rho_n], [(a) : \theta', \ldots, \theta^{(n)}] : \\ [(C) : \psi', \ldots, \psi^{(n)}], [\lambda - \mu - \rho - r - \tfrac{1}{2} : \rho_1, \ldots, \rho_n] : \\ [(b')\ \phi']; \ldots; [(b^{(n)} : \phi^{(n)}];) \\ [(d') : \delta']; \ldots; [d^{(n)} : \delta^{(n)}]; \end{matrix} \; x_1/\beta, \ldots, x_n/\beta \right] \quad (1.6)$$

बशर्ते कि $\rho_1 > 0$ समस्त $i=1, \ldots n$, के लिए

$$Re(\alpha) > 0,\ Re(\beta) > 0.$$

$$Re(\rho + \mu + 1 \pm \nu + \sum_{i=1}^{n} \rho_i\, \alpha_i) > 0;$$

$$\alpha_i = \min.\ Re\frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}},\ j=1, \ldots, \mu^{(i)}.$$

$$|\arg (x_i)| < \tfrac{1}{2}\pi\ \triangle_i'$$

$$\triangle_i' \equiv -\sum_{j=\lambda+1}^{A} \theta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{\nu^{(i)}} \phi_j^{(i)} - \sum_{j=\nu^{(i)}+1}^{B^{(i)}} \phi_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=1}^{C} \psi_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{\mu^{(i)}} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=\mu^{(i)}+1}^{D^{(i)}} \delta_j^{(i)} > 0,\ i=1, \ldots, n.$$

एवं (1.6) के दक्षिण पक्ष में आने वाली श्रेणी परम अभिसारी हैं ।

द्वितीय समाकल

$$\int_0^\infty \exp(-\tfrac{1}{2}t)\, J_{\lambda'+\nu}(\alpha t^{1/2})\, J_{\lambda'-\nu}(\alpha t^{1/2})\, W_{k,\mu}(t)\, t^{\rho-1}$$

$$\times H^{0,0\ :\ (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)})}_{A,C\ :\ [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}]} \begin{pmatrix} x_1 t^{\rho_1} \\ \vdots \\ x_n t^{\rho_n} \end{pmatrix} dt$$

$$= (\tfrac{1}{2}\alpha)^{2\lambda'} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+\lambda')_r (\frac{1}{2}+\lambda')_r (-1)^r \alpha^{2r}}{(1+2\lambda')_r\, r!\, \Gamma(1+\lambda' \pm \nu + r)}$$

$$\times H^{0,2\ ,\ :\ (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)})}_{\lambda+2, C+1\ :\ [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}]}$$

$$\left[\begin{matrix} [\frac{1}{2}-\lambda' \pm \mu - \rho - r : \rho_1, \ldots, \rho_n], [(a) : \theta', \ldots, \theta^{(n)}] : \\ [(c) : \psi', \ldots, \psi^{(n)}], [k-\lambda'-\rho-r : \rho_1, \ldots, \rho_n] : \\ [(b') : \phi']; \ldots; [(b^{(n)}) : \phi^{(n)}]; \\ [(d') : \delta']; \ldots; [(d^{(n)}) : \delta^{(n)}]; \end{matrix}\ x_1, \ldots, x_n\right] \quad (1.7)$$

बशर्ते कि $\rho_i > 0$ समस्त $i=1, \ldots, n$ के लिए

$$Re(\alpha) > 0,\ Re(\lambda' + \rho + \tfrac{1}{2} + \mu) + \sum_{i=1}^{n} \rho_i\, \alpha_i > 0;$$

$$\alpha_i=\min. \frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}, j=1, \ldots, \mu^{(i)}$$

$|\arg x_i|<\frac{1}{2}\pi\triangle_i'$, जहाँ $\triangle_i'$ (1.6) के समान ही है। (1.7) के दक्षिण पक्ष में आगत श्रेणी परम अभिसारी है एवं $W_{k,\mu}(x)$ ह्विटेकर फलन है।

तृतीय समाकल

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{-t^2}{4}\right)\cos \alpha t\, D_{2\nu}(t)\, t^{2\rho-1}$$

$$\times H^{0,0\,:\,(\mu',\nu');\ldots;(\mu^{(n)},\nu^{(n)})}_{A,C\,:\,[B',D'];\ldots;[B^{(n)},D^{(n)}]}\begin{pmatrix} x_1\, t^{2\rho_1} \\ \vdots \\ x_n\, t^{2\rho_n} \end{pmatrix} dt$$

$$=2^{\nu-\rho}\sqrt{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,\alpha^{2r}}{2^r\, r!\,(\frac{1}{2})_r} H^{0,3\,:\,(\mu',\nu');\ldots;(\mu^{(n)},\nu^{(n)})}_{A+3,C+3\,:\,[B',D'];\ldots;[B^{(n)},D^{(n)}]}$$

$$\left\{\begin{matrix} [1-2\rho:2\rho_1,\ldots,2\rho_n],[1-\rho-r:\rho_1,\ldots,\rho_n],[\frac{1}{2}-\rho-r:\rho_1,\ldots,\rho_n],[(a):\theta',\ldots,\theta^{(n)}]: \\ [(c):\psi',\ldots,\psi^{(n)}],[1-\rho:\rho_1,\ldots,\rho_n],[\frac{1}{2}-\rho:\rho_1,\ldots,\rho_n],[\frac{1}{2}+\nu-\rho-r:\rho_1,\ldots,\rho_n]: \\ [(b'):\phi'];\ldots;[(b^{(n)}):\phi^{(n)}]; \quad x_1/2^{\rho_1},\ldots,x_n/2^{\rho_n} \\ [(d'):\delta'];\ldots;[d^{(n)}):\delta^{(n)}]; \end{matrix}\right\} \tag{1.8}$$

बशर्ते कि $\rho_i>0$ समस्त $i=1, \ldots, n$ के लिए

$$Re(\nu)>0,\ Re\left(\rho+\sum_{i=1}^{n}\rho_i\,\alpha_i\right)>0,$$

$$\alpha_i=\min Re\frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}, j=1, \ldots, \mu^{(i)}.$$

$|\arg x_i|<\frac{1}{2}\pi\,\triangle_i'$ जहाँ $\triangle_i'$ (1.6) के ही समान हो। (1.6) के दक्षिण पक्ष में आगत श्रेणी परम अभिसारी है और $D_{2\nu}(x)$ परावलयी सिलिंडर फलन है।

चतुर्थ समाकल

$$\int_0^\infty \exp(-\tfrac{1}{2}t)\sin(ct^{1/2})\,W_{k,\mu}(t)\,t^{\rho-1}$$

$$\times H^{0,0}_{A,C}\begin{bmatrix} : (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)}) \\ : [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}] \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 t^{\rho_1} \\ \vdots \\ x_n t^{\rho_n} \end{pmatrix} dt$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c(-c^2/4)^r}{r!\,(\frac{3}{2})_r} H^{0,2}_{A+2,C+1} \begin{matrix} : (\mu', \nu'); \ldots; (\mu^{(n)}, \nu^{(n)}) \\ : [B', D']; \ldots; [B^{(n)}, D^{(n)}] \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} [\pm\mu-r-\rho : \rho_1, \ldots, \rho_n], [(a) : \theta', \ldots, \theta^{(n)} : \\ [(c) : \psi'; \ldots; \psi^{(n)}], [k-r-\rho-\frac{1}{2} : \rho_1, \ldots, \rho_n] : \\ [(b') : \phi']; \ldots; [(b^{(n)}) : \phi^{(n)}]; \\ [(d') : \delta']; \ldots; [(d^{(n)}) : \delta^{(n)}]; \end{matrix} \; x_1, \ldots, x_n \right] \tag{1.9}$$

बशर्ते कि $\rho_1 > 0$ समस्त $i=1, \ldots, n$ के लिए

$$Re(\rho+1\pm\mu)+\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_i > 0,$$

$|\arg x_i| < \frac{1}{2}\pi \triangle_i'$ जहाँ a_i तथा $\triangle_i'$ (1.6) के ही समान हैं तथा (1.9) के दक्षिण पक्ष में आगत श्रेणी परम अभिसारी हैं।

(1.6) की उपपत्ति

समाकल (1·6) की स्थापना की जा सकती है यदि हम (1.6) के वाम पक्ष के समाकल के कई चरों वाले H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल (1.1) के पदों में अभिव्यक्त करें, समाकलनों के क्रम को परस्पर परिवर्तित कर दें और आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात फल [2, pp. 410(43)] की सहायता से निकालें अर्थात्

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\exp(-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)x)\,M_{k,\mu}(\alpha x)\,W_{\lambda,\nu}(\beta x)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(1+\mu+\nu+\rho)\,\Gamma(1+\mu-\nu+\rho)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\lambda+\mu+\rho)} (\alpha)^{\mu+1/2}(\beta)^{-\mu-\rho-1/2}$$

$$\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}+k+\mu,\ 1+\mu+\nu+\rho,\ 1+\mu-\nu+\rho; \\ 2\mu+1,\ \frac{3}{2}-\lambda+\mu+\rho; \end{matrix} \; -\alpha/\beta\right)$$

$$Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0,\ Re(\rho+\mu)>|Re\ \nu|-1.$$

और इस प्रकार से प्राप्त कंटूर समाकल को (1.1) की सहायता से विवेचित करते हुए (1.6) प्राप्त करें।

इसी प्रकार (1.7), (1.8), (1.9) समाकलों को स्थापित किया जा सकता है, अन्तर इतना ही होगा कि हम क्रमशः [2, pp. 409, (37)], [2, pp. 396 (10)], [2, pp. 407, (28)] फलों का उपयोग करते हैं।

विशिष्ट दशाएँ

1. यदि हम (1.6) में समस्त θ', ϕ', ψ', δ' को इकाई मान लें तो हमें कई चरों वाले G-फलन के लिए रोचक फल प्राप्त होता है।

2. यदि हम (1.6) तथा (1.7) में $n=2$ लें तो हमें वह फल मिलेगा जिसे हाल ही में चौबीसा ने [1, pp. 86, (2.1.3)], [1, pp. 85, (2.1.2)] दो चरों वाले H-फलन के लिए $n_1=0$ रखकर प्राप्त किया है।

3. यदि हम (1.8) तथा (1.9) में क्रमशः $n=2$ लें तो हमें दो चरों वाले H-फलन के लिए कई रोचक समाकल प्राप्त होते हैं जो नवीन हैं।

ह्विटेकर फलन, मैकराबर्ट का E-फलन तथा हाइपरज्यामितीय फलनों वाली विशिष्ट दशाएँ हमारे मुख्य समाकलों से प्राप्त की जा सकती हैं।

निर्देश

1. चौबीसा, एम०पी०, **पी०एच०डी० थीसिस**, उदयपुर यूनिवर्सिटी 1978

2. एर्डेल्यी, ए० Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954

3. खाड़िया, एस०एस०तथा गोयल, ए०एन०, **विज्ञान परिषद अनु०पत्रिका**, 1970, **13**, 191-201

4. श्रीवास्तव, एच०एम० तथा पंडा, आर०, J. Reine Angew. Maths. 1976, **283/284**, 265-274.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 25, No. 4, October, 1982, Pages 389-395

कॉपर तथा ऐमीनो अम्लों के मिश्रित संकुलों के पोलेरोग्राफिक एवं स्पेक्ट्रमी गुणों का तुलनात्मक अध्ययन

एस० एन० मण्डलोई, पी० के० चिताले तथा एम० एस० वर्मा
रसायन अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन (म० प्र०)

[प्राप्त — मई 8, 1982]

सारांश

[Cu(gly)(alan)0·5H_2O] तथा [Cu(gly)(ser)] संकुलों का पोलेरोग्राफिक आचरण जलीय 0·1M सोडियम परक्लोरेट की उपस्थिति में अन्वेषित किया गया है। पोलेरोग्राफिक अभिलक्षण ($E_{1/2}$,i_dD, α तथा प्रवण) निर्धारित किए गए हैं। वैल्चेक विधि से विसरण की सक्रियण ऊर्जा Q_D परिकलित की गई है। पोलेरोग्राफिक अनुत्क्रमणीय तरंग के गुणधर्मों से संदर्भ दर नियतांक का मान एक संदर्भ 0.26 वोल्ट संतृप्त केलोमल इलेक्ट्रोड के सापेक्ष निकाला गया है। अध्ययन किये गये ताप परिसर में ताप के साथ अर्द्धतरंग विभव का परिवर्तन यह दर्शाता है कि संकुल [Cu(gly)(alan)0·5H_2O] का अपचयन एक निश्चित क्रियापथ द्वारा होता है किन्तु [Cu(gly)(ser)] में नहीं। प्रत्येक ताप पर अर्द्धतरंग विभव का अधिक ऋणात्मक होना तथा संदर्भ नियतांक का कम होना यह दर्शाता है कि सीरीनेट लिगेंड से एलेनीनेट लिगेंड ज्यादा शक्तिशाली हैं। यह आंकड़ा स्पेक्ट्रमी प्राचलों की प्रवृत्ति की पुष्टि करता है। पोलेरोग्राफिक एवं स्पेक्ट्रमी गुणधर्मों की सहसम्बद्धता को एक सम्भावित अपचयन क्रियापथ प्रस्तावित कर समझाया गया है।

Abstract

Comparative study of polarographic and spectral parameters of some mixed-ligand complexes of copper with amino acids. *By* S.N. Mandloi, P.K. Chitale and M.S. Verma, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain (M.P.)

Polarographic behaviour of [Cu(gly)(alan)0·5H_2O] and [Cu(gly)-(ser)] complexes has been investigated in the presence of aqueous 0·1M sodium perchlorate medium. Polarographic characteristics ($E_{1/2}$,i_d,D, and slope) have been determined.

Activation energy of diffusion Q_D has been calculated by Vlchek's method. Values of reference rate constant at a reference potential of −0·26 volt vs SCE have been found from the characteristics of irreversible polarographic waves. The variation of half wave potential with temperature, in the range of temperature's study, shows that complex [Cu(gly)(alan) 0·5H_2O] follows a certain mechanism of reduction with temperature but [Cu(gly)(ser)] does not do so. The more negative values of half wave potential and less value of reference rate constant for [Cu(gly)(alan)0.5H_2O] at all temperatures shows that alaninate is stronger ligand than serinate. This data supports the trend found in spectral parameters. The correlation of polarographic and spectral characteristics has been explained by proposing a probable mechanism of reduction.

इलेक्ट्रॉनी स्पेक्ट्रम में इलेक्ट्रॉनों का संक्रमण उच्चतम भरे हुए कक्षकों से उच्चतर खाली कक्षकों में होता है, जबकि पोलेरोग्राफिक अपचयन में इलेक्ट्रॉन निम्नतम ऊर्जा वाले अपूर्ण कक्षकों में जाते हैं। इस प्रकार किसी संकुल में संक्रमण धातु आयनों के d कक्षकों के विपाटन पर लिगैण्डों का प्रभाव, स्पेक्ट्रमी अध्ययनों का जितना अच्छा अभिलक्षण होता है, उतना ही अच्छा अभिलक्षण पोलेरोग्राफिक आचरण में होता है[1]। अतः दोनों ही पहुँचमार्गों को सहसम्बद्ध किया जा सकता है। इस तथ्य को आधार बनाकर कई ऐसे प्रयास[2–4] किये गये हैं जिनमें संकुलों के स्पेक्ट्रमी अभिलक्षणों को पोलेरोग्राफिक आचरण से सहसम्बद्ध करने का प्रयत्न किया गया है। यद्यपि ऐसे सहसम्बद्धों की उपयोगिता इलेक्ट्रोड क्रियाविधि समझने के लिए अद्वितीय है, लेकिन इस पहुँचमार्ग को इस तरह के कुछ और आंकड़ों की आवश्यकता है। प्रस्तुत शोधपत्र में इस सहसम्बद्ध को स्पष्ट करने के लिए कॉपर (II) आयन तथा ऐमीनो अम्लों के कुछ मिश्रित संकुलों के, जो जीव-विज्ञान की दृष्टि से बहुत ही महत्वपूर्ण हैं[5], इलेक्ट्रोड आचरण का अध्ययन किया गया है। वस्तुतः मिश्रित संकुलों को एन्जाइम के स्थान पर माडल[6–8] के रूप में प्रयुक्त कर उनकी क्रियाविधियों को सरलता से समझा जा सकता है। मिश्रित संकुलों [Cu(gly) (alan)0.5HO_2] तथा [Cu(gly)(ser)] (जहाँ पर gly=ग्लाइसिनेट, alan=एलैनिनेट, ser=सेरिनेट है) का अध्ययन किया गया है। इन संकुलों का क्रिस्टलोग्राफिक[9,10] अध्ययन प्रदर्शित करता है कि ये दोनों ही संकुल चतुष्कोणीय रूप से विकृत अष्टफलकीय हैं। इन संकुलों का विलयन में अध्ययन[11] प्रदर्शित करता है कि जलीय विलयन में भी ये संकुल विकृत अष्टफलकीय हैं। इन संकुलों के स्पेक्ट्रमी तथा पोलेरोग्राफिक गुणों के सहसम्बन्ध की बुद्धिसंगत व्याख्या प्रस्तुत करने का प्रयास, इलेक्ट्रोड सतह पर विध्रुवक के अभिविन्यास के आधार पर किया गया है।

प्रयोगात्मक

दोनों मिश्रित संकुलों को दी हुई प्रामाणिक[9,10] विधियों द्वारा बनाया गया था और इनकी शुद्धता की जांच तत्वों के विश्लेषण एवं अवरक्त स्पेक्ट्रम द्वारा की गई। दोनों मिश्रित संकुल जल में अत्यधिक विलेय हैं। सभी विलयन चालकतामापी जल में बनाये गये थे। वैश्लेषिक श्रेणी का सोडियम परक्लोरेट सहायक विद्युतअपघट्य के रूप में एवं ट्रिटान X—100 उच्चिष्ठ निरोधी के रूप में प्रयुक्त किया गया था। परीक्षण विलयन पोलेरोग्राफिक सेल में लिया गया था, पोलेरोग्राफिक सेल में प्रत्येक प्रयोग में संकुल

की सांद्रता 5×10^{-4}M थी, उसमें विलीन आक्सीजन शुद्ध नाइट्रोजन के बुदबुदों द्वारा 30 मिनट में निष्कासित की गई। वास्तविक प्रयोग की अवधि में जितना ताप रखा गया उसका यथास्थान उल्लेख है। कॉल्थॉफ तथा लिंगेन[12] द्वारा अनुशंसित हस्त-चालित पोलेरोग्राफिक परिपथ पर सभी पोलेरोग्राम लिये गये हैं। बजाज कैसीज का विभवमापी तथा तोशनीवाल का बाक्स प्ररूप धारामापी उपयोग में लाया गया था। बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड के लिये वैश्लेषिक श्रेणी का पारा उपयोग में लाया गया। सभी विभवों को ह्यू्म एवं हैरिश के संतृप्त कैलोमल इलेक्ट्रोड के प्रति मापा गया है। पोलेरोग्राफिक सेल का प्रतिरोध प्रत्यावर्ती धारा व्हीट-स्टोन सेतु द्वारा निकालकर देखा गया कि यह 1000 ± 100 ओह्म है, इसलिए विभवपात संशोधन आवश्यक नहीं है। प्रयुक्त बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड के अभिलक्षण थे—$h_{corr}=38{\cdot}5$ cm, $t=3{\cdot}05$ sec., $m=2{\cdot}06$ mg/sec. इलेक्ट्रॉनी स्पेक्ट्रम को बैकमेन-26 एवं अवरक्त स्पेक्ट्रम परकिन एल्मर-377 माडल से रिकार्ड किया गया था।

परिणाम तथा विवेचना

जलीय 0·1M सोडियम परक्लोरेट माध्यम में दोनों संकुलों के धाराविभव आलेख सुस्पष्ट एक तरंगीय द्वि-इलेक्ट्रान अपचयन दर्शाते हैं। दोनों संकुलों के अपचयन के विस्तृत क्रियापथ के अध्ययन हेतु भिन्न-भिन्न तापों पर एवं पारद स्तंभ की भिन्न-भिन्न ऊँचाइयों पर पोलेरोग्राम लिये गये। पारद स्तंभ की भिन्न-भिन्न ऊँचाइयों पर दोनों संकुलों के लिए $id/\sqrt{h}$ एक नियतांक आता है, जो इस बात को दर्शाता है कि इलेक्ट्रोड की सतह पर होने वाली अपचयन की क्रिया वितरण द्वारा नियंत्रित है। दोनों संकुलों के लिए विसरण धारा id ताप की वृद्धि के साथ बढ़ती जाती है तथा अर्द्ध तरंग विभव घटता जाता है अर्थात् अधिक धनात्मक होता जाता है। इल्कोविक समीकरण के आधार पर की गई गणना के अनुसार दोनों संकुलों के लिए स्थानांतरित इलेक्ट्रानों की संख्या लगभग दो आती है।

$-E_{de}$ एवं $\log(id-i)/i$ के बीच खींचे गये आलेखों की प्रवणता को उत्क्रमणीयता का आधार मानने पर दोनों संकुलों का बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड पर अपचयन अनुत्क्रमणीय आता है क्योंकि सैद्धान्तिक प्रवणता का मान प्रायोगिक मान से कम आता है। सभी तापों पर स्थानांतरण गुणांक α एवं अर्द्ध तरंग विभव को ऑलधाम एवं पैरी[13] विधि द्वारा निकाला गया है। संदर्भ दर नियतांक Kr का मान $-0{\cdot}26$ वोल्ट पर (संतृप्त कैलोमल इलेक्ट्रोड के सापेक्ष) निम्न समीकरण का उपयोग करके निकाला गया है।

$$E_{1/2}=Er+\frac{0{\cdot}0592}{\alpha n}\log(0{\cdot}89\ Kr\sqrt{t}/D)$$

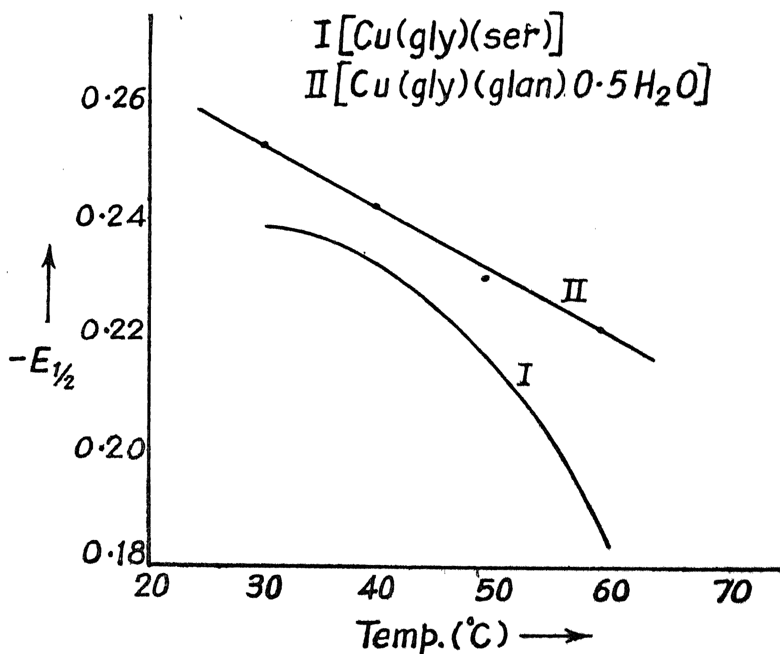
जहाँ Er=सन्दर्भ विभव, t=बिन्दुपात समय, D=विसरण गुणांक।

भिन्न-भिन्न तापों पर विसरण धारा के मानों का उपयोग विसरण की सक्रियण ऊर्जा Q_D की गणना के लिए वैल्चैक के निम्न समीकरण[14] में किया गया है:

$$\log id/m^{2/3}t^{1/6}=\log 0{\cdot}627nfD^{1/2}C-1/2\frac{Q_D}{2{\cdot}3RT}$$

जहां पर हर एक संकेत प्रचलित सार्थकता रखता है।

दोनों संकुलों के पोलेरोग्राफिक अभिलक्षण सारणी 1 में दिये गये हैं। इस सारिणी के गहन अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि ताप में वृद्धि के साथ विसरण धारा बढ़ती जाती है, जो कि संभवतः बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड की सतह पर विध्रुवक के सान्द्रण में वृद्धि के फलस्वरूप होता है। दोनों संकुलों के लिए अर्द्धतरंग विभव ताप में वृद्धि के साथ धनात्मक दिशा में खिसकता जाता है जो संकुलों के उच्च ताप पर सरलतर अपचयन को दर्शाता है। संभवतः यह सरलतर अपचयन उच्च ताप पर अधिवोल्टता[15] के कम होने एवं बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड में इलेक्ट्रानों की ऊर्जा कम विभव पर ही फर्मी स्तर[16] पर पहुँचने के फलस्वरूप होता है। [Cu(gly)(alan)$0{\cdot}5H_2O$] संकुल के लिए अर्द्ध तरंग विभव तथा ताप के बीच खींचा गया आलेख (देखिए चित्र 1) सरल रेखा आता है, जो यह प्रदर्शित करता है कि इस संकुल का अपचयन अध्ययन किये गये ताप परिसर में एक निश्चित क्रियापथ[14] से अपचयित होता है जबकि [Cu(gly)(ser)] ताप के साथ अपने अपचयन का क्रिया-पथ बदल देता है।



चित्र 1 ताप के साथ अर्द्ध तरंग विभव का परिवर्तन

दोनों संकुलों के पोलेरोग्राफिक एवं स्पेक्ट्रमी प्राचलों के तुलनात्मक अध्ययन हेतु $E_{1/2}$, Kr, Q_D, λmax, logK सारणी 2 में दर्शाये गये हैं। इसके अध्ययन से स्पष्ट है कि [Cu(gly)(ser)] का अपचयन [Cu(gly)(alan)$0{\cdot}5H_2O$] की अपेक्षा सरल है। उपर्युक्त प्रेक्षणों को इस बात द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं कि एलेनीनेट लिगेंड सेरीनेट लिगैंड की अपेक्षा अधिक प्रबल है।

उपर्युक्त सहसम्बन्धों को जो पोलेरोग्राफिक तथा स्पेक्ट्रमिकीय प्राचलों में पाये जाते हैं, विध्रुवक के इलेक्ट्रोड सतह पर अभिविन्यास के आधार पर विवेचित[17] किया जा सकता है।

सारणी 1

$Cu(gly)(aln)0\cdot5H_2O$ तथा Cu(gly)(ser) संकुलों के जलीय 0·1M सोडियम परक्लोरेट माध्यम में पोलेरोग्राफिक अभिलक्षण

h covr=38·5 cm. [विध्रुवक]=5×10^{-4}M [टिट्रॉन X−100]=·001%

संकुल	ताप	$-E_{1/2}$	i_d	प्रवण		α	$D^{1/2}\times10^3$	$Kr\times10^3$
	(0C)	(Vvs SCE)	(μA)	प्राप्त	परिगणित		$cm^2\ sec^{-1}$	$cm\ sec^{-1}$
[Cu(gly)(ser)]	30	0·2400	5·015	0·1727	0·0300	0·17	4·51	3·77
	40	0·2337	5·752	0·1492	0·0310	0·21	4·74	6·08
	50	0·2150	6·385	0·1449	0·0320	0·22	5·70	7·58
	60	0·1833	7·167	0·1147	0·0331	0·28	6·38	21·57
[Cu(gly)(alan)$0\cdot5H_2O$	30	0·2543	5·409	0·1777	0·0300	0·17	4·56	2·57
	40	0·2428	5·910	0·1513	0·0310	0·20	4·98	2·89
	50	0.2314	6·544	0·1507	0·0320	0·21	5·49	3·16
	60	0·2226	7·341	0·1421	0·0331	0·22	6·19	3·56

सारणी 2

$Cu(gly)(alan)0{\cdot}5H_2O$ तथा Cu(gly)(ser) संकुलों के पोलैरोग्राफिक एवं स्पेक्ट्रमी अभिलक्षण

संकुल	$-E_{1/2}$ (Vvs SCE 4°C)	$Kr \times 10^3$ (cm sec^{-1} 04°C)	Q_D (Kcal/mole)	10gK	λ_{max} (cm^{-1})
[Cu(gly)(ser)]	0·2337	6·08	4·3	15·10	16000
[$Cu(gly)(alan)0{\cdot}5H_2O$]	0·2428	2·89	4·7	15·36	16120

यह अभिधारित करके कि विध्रुवक इलेक्ट्रोड सतह पर इस तरह से अभिविन्यस्त होता है कि केन्द्रीय धातु का xz या yz वर्गतल इलेक्ट्रोड सतह के लम्बवत् रहता है यह बुद्धिसंगत व्याख्या दी जा सकती है कि अन्ततः dxz या dyz जिसका अभिविन्यास युक्तियुक्त है, रिक्त होता है तथा इलेक्ट्रोड से आने वाले इलेक्ट्रॉन ग्रहण करता है। इस प्रक्रिया में जितनी अधिक ऊर्जा व्यय होगी, लिगैंड उतना ही अधिक सशक्त माना जायेगा और अपचयन उतना अधिक कठिन होगा। इस प्रकार स्पेक्ट्रमी तथा पोलरोग्राफिक प्राचलों का सहसम्बन्ध तर्कसंगत है।

निर्देश

1. सिंह, एस०एस०, वर्मा, एम०एस०, शर्मा, एच०एस० तथा निगम, एच०एल०, **इलेक्ट्रोकिम० एक्टा**, 1978, **23**, 1287, तथा इसमें दिये गये निर्देश
2. वैल्चैक, ए०ए०, **इलेक्ट्रोकिम एक्टा**, 1968, **13**, 1063
3. बनर्जी, डी० तथा बनर्जी, पी०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1972, **49**, 1321
4. वैल्चैक, ए०ए०, Reveue chim. miner, 1968, **t5**, 299
5. मार्टिन, आर०पी०, पेटीट-रेमल, एम०एम० तथा शार्फ जे०पी०, in "Metal ions in biological systems" ed. सीगल एच० (एम०डेकर न्यूयार्क), 1973, vol. **2**, 1
6. सिगल, एच०, **कीमिया (एग्रो)**, 1967, **21**, 489
7. मिल्डवन, ए०एस० तथा कान एम०, **जर्न०बायोल० केमि०**, 1966, **241**, 1178
8. मिल्डवन, ए०एल०, लेफ, जे०एच० तथा कान, एम०, **बायो०केम०** 1966, **6**, 1805
9. चेपुरीना, एल०एफ०, एब्लोव, ए० वी०, ड्यकोन, आई०ए० तथा डान, एस०वी० Zh. Neorg. khim., 1974, **19(9)**, 2427
10. चेपुरीना, एल०एफ० तथा एब्लोव, ए० वी०, वही०, **वही**, 1969, **14(6)**, 1521

11. जर्जेली, ए०, सुवागों, आई०, नाग्यपाल, आई० तथा किरेली, आर०, **इनआर्ग०किम०एक्टा**, 1972, **6**, 435

12. कॉल्थॉफ, आई०एम०, तथा लिंगेन, जे०जे०, "Polarography" इन्टर साइन्स न्यूयार्क, 1952 पृष्ठ 300

13. ऑलधाम, के०बी० तथा पैरी, ई०पी०, Analyst. Chem., 1968, **40**, 65

14. वैल्चैक, ए०ए०, Coll. Czech. Chem. Communs., 1959, **24**, 3538

15. ग्लासटन, एस० "An Introduction to Electrochemistry" एफलिऐटेड इस्टवेस्ट प्रेस, मद्रास, 1975, 462

16. बुकरिश, जे०ओम०, **जर्न०केमि०एजू०**, 1971, **48**, 352

17. वर्मा, एम०एस०, Z. Anorg. Allg. Chemie., (प्रेषित)

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि के दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेगें।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।

   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

   फॉवेल, आर० आर० तथा म्यूलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

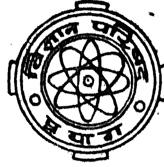
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F.N. A. Sc.



संशोधित मूल्य

वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 5 पौंड या 12 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 1·5 पौंड या 4 डालर

Revised Rates

Annual Rs. 12 *or* 5 £ *or* $ 12
Per Vol. Rs. 3 *or* 1·5 *or* $ 4

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7, बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
83226